

УДК 519.63

А.Н. Власов, Д.Б. Волков-Богородский, В.В. Знаменский \*, М.Г. Мнушкин\*\*  
ИПРИМ РАН, \*ФГБОУ ВПО «МГСУ», \*\*ИГЭ РАН

### ГЕНЕРАЦИЯ НЕРЕГУЛЯРНЫХ ГЕКСАЭДРАЛЬНЫХ СЕТОК

Предложены оригинальные подходы к проблеме дискретизации расчетной области при решении задач методом конечных элементов. Блочный метод предполагает численно-аналитическую аппроксимацию гомеоморфного отображения исходной области на каноническую с помощью локальных представлений этого отображения в подобластях-блоках системами специальных функций, аналитически точно удовлетворяющих некоторому дифференциальному оператору. В дальнейшем это отображение используется для генерации сетки. Рассмотрено отображение неоднородной области  $G \subset R^3$ , представляющей собой начальную, «грубую» идеализацию расчетной области в параметрическом пространстве, на исходную неоднородную область, удовлетворяющее однородному уравнению для оператора Ляме. Это отображение содержит управляющий параметр  $\nu$  и определяется заданием параметрической сетки на границе области и границах раздела неоднородностей (включений). По существу, этот подход является задачей теории упругости с заданными перемещениями.

**Ключевые слова:** метод конечных элементов (МКЭ), сетка разбивки, блочный метод, оператор Лапласа, оператор Ляме, эффективные деформационные характеристики, композитный материал.

Метод конечных элементов (МКЭ) основывается на представлении расчетной области и/или реальной конструкции в виде совокупности элементов конечных размеров, соединенных между собой в узлах конечным числом узловых связей. Другими словами, действительная физическая система заменяется идеализированной дискретной моделью. При этом для МКЭ характерны большие объемы исходных данных. Поэтому на этапе их подготовки самое существенное заключается в создании начальной расчетной модели, исходя из инженерной интуиции о поведении конструкции. Впоследствии эта модель может корректироваться на основе анализа результатов расчета. Корректировка модели может выполняться и программным путем, если такая возможность реализована в используемом программном комплексе. Подготовка исходных данных осуществляется, как правило, с помощью программ-генераторов сеток конечных элементов, образующих блок подготовки данных.

Дискретизация рассматриваемой области, т.е. замена континуальной среды совокупностью конечных элементов заданной формы, соединенных между собой в узлах конечным числом связей, несмотря на видимую простоту, имеет большое значение, хотя она и не обусловлена строгими теоретическими рекомендациями и во многом определяется интуитивно. Обычно при построении конечно-элементной модели руководствуются предварительными представлениями о характере ожидаемого результата и в местах высоких градиентов искомого величин сетку конечных элементов сгущают.

Одним из основных этапов подготовки данных является генерация сетки конечных элементов. Например, авторы [1] считают, что подготовка и задание параметров ансамбля конечных элементов вручную составляют около 80 % всей стоимости прочностного анализа конструкции.

В настоящее время разработанные программы автоматизированной разбивки области на конечные элементы и рациональной нумерации узлов не вполне отвечают запросам расчетчиков. Это выражается в следующем:

разбивка на треугольные (2D) и тетраэдральные (3D) элементы делает сетку «жесткой», что при решении задач может приводить либо к потере точности решения, либо к необходимости чрезмерного увеличения степени дискретизации расчетной области, либо в некоторых случаях — к проявлению эффекта «запирания»;

разбивка на четырехугольные (2D) и гексаэдральные (3D) элементы сложных областей (многосвязные области, области с включениями) не имеет в настоящее время

эффективного решения. Сетка КЭ, построенная на основе объединения треугольных/четырёхугольных (2D) и тетраэдральных/гексаэдральных (3D) элементов, тянет за собой недостатки разбивки, характерные для сетки из треугольных (2D) и тетраэдральных (3D) элементов.

Выставление краевых условий на сгенерированной сетке также сопряжено с определенными неудобствами, что приводит к большим затратам времени, повышенным требованиям к машинным ресурсам и чревато потенциальными, трудно отслеживаемыми ошибками.

1. *Построение сеток блочным методом.* Блочный метод предполагает численно-аналитическую аппроксимацию гомеоморфного отображения исходной области на каноническую с помощью локальных представлений этого отображения в подобластях-блоках системами специальных функций, аналитически точно удовлетворяющих некоторому дифференциальному оператору [2]. В дальнейшем это отображение используется для генерирования сетки.

Это предполагает разбиение исходной области на односвязные блоки, введение локальных представлений для гомеоморфного отображения и систем специальных функций в блоках, и сшивку этих локальных представлений с помощью метода наименьших квадратов.

Рассмотрим отображение исходной области  $G \subset R^3$  на каноническую область в параметрическом пространстве  $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ , удовлетворяющее однородному уравнению

$$L \xi(P) = 0, P \in G, \quad (1)$$

где в качестве оператора  $L$  рассматривается оператор Лапласа  $L \xi(P) = \nabla^2 \xi(P)$  или оператор Ляме  $L \xi(P) = \nabla^2 \xi(P) + (1 - 2\nu)^{-1} \nabla \operatorname{div} \xi(P)$ . Во втором случае отображение содержит дополнительный параметр  $\nu$ . Отображение задается параметрической сеткой на границе области, т.е. граничными условиями

$$\xi(P') = h(P'), P' \in \partial G. \quad (2)$$

Гармоническое отображение широко используется для построения пространственных или поверхностных сеток [3, 4]. В качестве канонической области обычно рассматривается единичный куб  $P = \{\xi: 0 < \xi_k < 1\}$ , где  $k = 1, 2, 3$ , или единичный квадрат, где  $k = 1, 2$ .

Казалось бы, что в этом случае удобно вводить разбиение на блоки в пространстве параметров-координат  $\xi_k$  (поскольку единичный куб легко разбить на более мелкие параллелепипеды) и строить отображение канонической области на исходную (т.е. обратное отображение). Этот подход удобен еще и тем обстоятельством, что соответствие границ при таком отображении задается явно функциями двух координат, определенными на каноническом квадрате (или отрезке):

$$P'(\xi_k) = h(\xi_k), \xi_1 = \{0, 1\} \text{ или } \xi_2 = \{0, 1\}, \text{ или } \xi_3 = \{0, 1\}. \quad (3)$$

Однако известно, что обратное отображение канонической области на невыпуклую исходную, как правило, приводит к вырождению отображения (т.е. к возникновению перекрестов), и таким подходом следует пользоваться с большой осторожностью.

Эта особенность хорошо изучена для гармонического оператора (отображения) Лапласа. И усложнение оператора, которому подчиняется отображение (т.е. замена гармонического оператора на оператор Ляме), не изменяет ситуацию в принципиальном плане. Отображение является взаимно-однозначным [5, 6] в случае прямого отображения исходной области на каноническую.

Нами были реализованы тесты обратного отображения, задаваемого оператором Ляме, блочным методом, и ниже приведены примеры расчетов этого отображения для тестовой области в виде «ступеньки»

$$G = \{0 < x \leq 1, 2, 0 < y < 1\} \cup \{1, 2 < x < 2, 4, -1 < y < 1\}. \quad (4)$$

Исходный параметрический квадрат был разбит на 100 блоков (рис. 1, а), в качестве аппроксимирующей системы функций были взяты гармонические полиномы с максимальной степенью  $N = 3$ , локальное отображение определялось представлением Папковича — Нейбера [7] из теории упругости:

$$\xi(P) = f(P) - \frac{1}{4(1-\nu)} \nabla(r \cdot f(P)), \quad (5)$$

где  $r = (x, y, z)$  — радиус-вектор в точку  $P$  из начала координат;  $f$  — гармонический вектор;  $r \cdot f$  — скалярное произведение двух векторов.

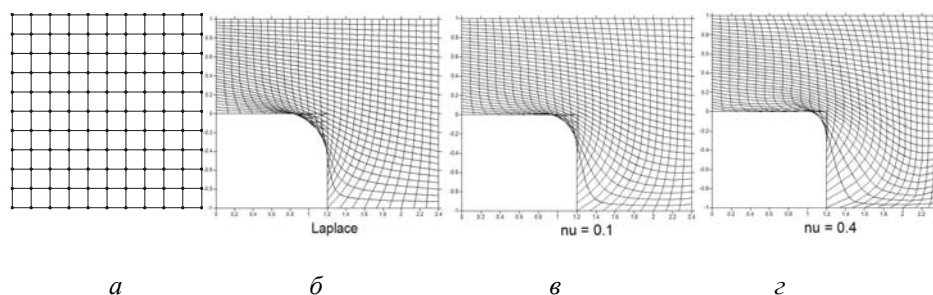


Рис. 1. Примеры отображений параметрического квадрата

Представление (5) замечательно еще тем, что дает связь между отображением, задаваемым оператором Ляме  $\xi$ , и гармоническим отображением  $f$ .

На рис. 1 приведены результаты отображения канонического квадрата (см. рис. 1, а) для гармонического отображения (рис. 1, б) и отображения, задаваемого оператором Ляме (рис. 1, в, г) с разным коэффициентом Пуассона  $\nu$ .

На этих рисунках видна тенденция к исправлению сетки при увеличении параметра  $\nu$ , однако в окрестности угловой точки сетка все равно имеет вырождение.

Поэтому для построения сетки имеет смысл рассматривать только прямое отображение (1) (исходной области на параметрический квадрат или куб), поскольку в этом случае оно является взаимно-однозначным и может быть использовано для построения сетки в области  $G$ .

В этом случае приходится вводить блочную структуру, т.е. разбиение исходной (сложной) области на более простые блоки. Однако граничные условия, определяющие отображение, могут быть заданы в относительно простом и удобном виде

$$\xi_k(P') = \{0, 1\}, \quad \frac{\partial \xi_k^{(k)}(P')}{\partial n} = 0, \quad P' \in S_k, \quad (6)$$

где  $S_k \subset \partial G$  является частью границы области, отображаемой на стороны параметрического квадрата (или куба), ортогональные параметру  $\xi_k$ ;  $\xi^{(k)}$  — дополнительные (касательные) параметры.

В качестве блочной структуры может выступать разбиение области на достаточно крупные (криволинейные) треугольники (тетраэдры) или четырехугольники (гексаэдры) без предъявления жестких требований к их вытянутости.

Для решения краевой задачи (1), (2) или (1), (6) применяется блочный метод, основанный на разбиении исходной области на односвязные подобласти-блоки (в общем случае криволинейные) и на представлении решения в виде (5). Векторный гармонический полином  $f$  строится в виде суперпозиции элементарных гармонических функций  $\Phi_n^m(P)$  (полиномов), представленных в виде ряда, определяемого комплекснозначной функцией  $\psi_0(w) = w^m$  и степенной функцией  $U_0(z)$ :

$$f_0(P) = \operatorname{Re} \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^n \left\{ A_n^m \Phi_n^m(P-P_0) + B_n^m \bar{\Phi}_n^m(P-P_0) \right\}, \quad (7)$$

$$\Phi_n^m(P) = \sum_p \frac{(-1)^p \bar{w}^p}{4^p p!} \Psi_0^{(-p)}(w) U_0^{(2p)}(z), \quad \Psi_0(w) = w^m, \quad U_0(z) = z^{n-m}. \quad (8)$$

Общее число вещественных степеней свободы в (7) равно  $3(N+1)^2$ , где  $N$  является максимальной степенью аппроксимирующих полиномов. Ряд (7) является обобщением ряда Тейлора для гармонических функций, и его коэффициенты могут быть вычислены через дифференцирование функции  $f(P)$  в точке  $P_0$ :

$$A_n^m = \frac{2 - \delta_m^0}{m!(n-m)!} \left. \frac{\partial^n f(P)}{\partial w^m \partial z^{n-m}} \right|_{P=P_0}, \quad B_n^m = \frac{2 - \delta_m^0}{m!(n-m)!} \left. \frac{\partial^n f(P)}{\partial \bar{w}^m \partial z^{n-m}} \right|_{P=P_0}.$$

Ниже приведены примеры прямого отображения на параметрический квадрат для исходной области — «ступенька», разбитой на блоки, как это показано на рис. 2. Максимальная степень аппроксимирующих функций  $N=9$ . На рис. 2, б приведены результаты для гармонического оператора, на рис. 2, в — для оператора Ляме с коэффициентом Пуассона  $\nu = 0,01$ .

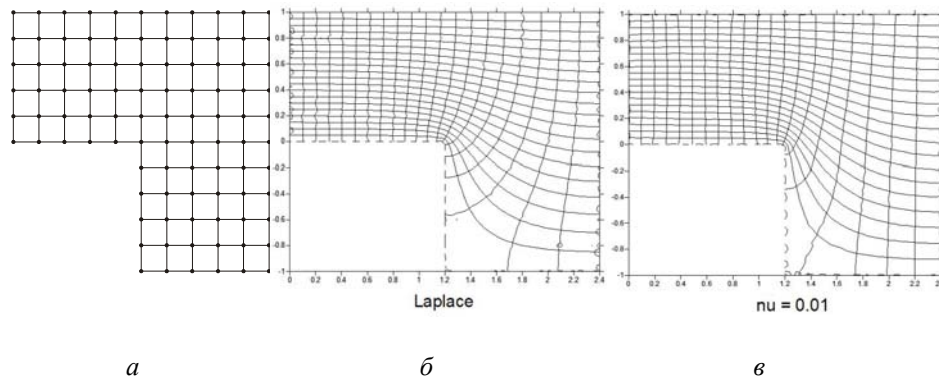


Рис. 2. Примеры отображения «ступеньки»

В качестве канонической области могут быть использованы и другие области, например, единичный шар

$$B = \{ \xi : 0 < (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)^{1/2} < 1 \},$$

кольцевая область

$$C_r = \{ \xi : r < (\xi_1^2 + \xi_2^2)^{1/2} < 1 \}$$

или сферический слой

$$B_r = \{ \xi : r < (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)^{1/2} < 1 \}.$$

Были реализованы тесты прямого гармонического отображения на двусвязную каноническую область (кольцевая область на себя и квадрат с эллиптическим вырезом на кольцевую область). Здесь может быть потеряна взаимная однозначность отображения (рис. 3) [8], однако эти отображения могут применяться при построении сетки в переходной области, например, при моделировании поверхностного слоя для включения в композиционном материале (рис. 4).

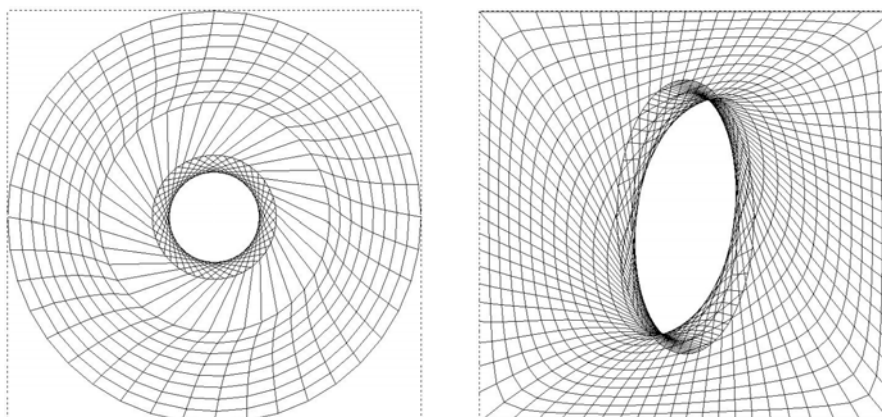


Рис. 3. Потеря взаимной однозначности при отображении двусвязной области

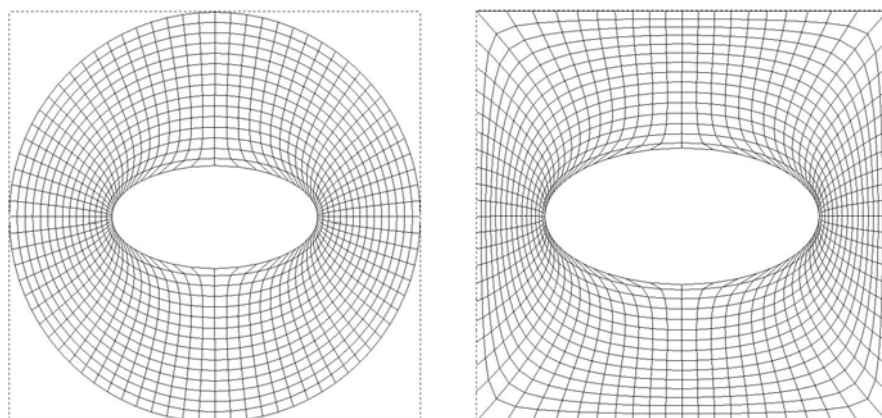


Рис. 4. Гармоническое отображение ячейки с включением

При малых деформациях области можно ввести взаимно-однозначное отображение продеформированной области на исходную, и такой подход можно применить для гладкой деформации уже построенной сетки.

В настоящее время отработана схема сшивки относительно крупных криволинейных блоков методом на различных базисных классах гармонических функций, аналитически учитывающих геометрические особенности задачи, что может быть использовано для эффективного построения отображения (1) в сложных областях. При этом возникает необходимость решения блочной системы алгебраических уравнений с плотными блоками, но разреженной структурой. Структурные особенности возникающей системы уравнений эффективно реализованы в современных параллельных вычислительных системах с распределенной и общей памятью.

2. *Построение сеток методом прямого отображения оператором Ляме.* Рассматривается отображение неоднородной области  $G \subset R^3$ , представляющей собой начальную, «грубую» идеализацию расчетной области в параметрическом пространстве  $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ , на исходную неоднородную область, удовлетворяющее однородному уравнению (1) для оператора Ляме. Это отображение содержит управляющий параметр  $\nu$  и определяется заданием параметрической сетки на границе области  $\partial G$  и границах раздела неоднородностей (включений)  $\partial\Sigma$ , т.е. условиями (2).

По существу, отображение (1), заданное условиями (2), является задачей теории упругости с заданными перемещениями. При этом перемещения задаются в узлах на

границе области и на границах раздела неоднородностей таким образом, чтобы эти узлы смещались на границу исходной расчетной области и границы раздела неоднородностей соответственно. Отметим, что перемещения здесь понимаются в широком смысле, т.е. закрепления рассматриваются как нулевые перемещения. Корректировать (подправлять) такое отображение можно определяя дополнительно перемещения (в т.ч. и закрепления) необходимых узлов.

Ниже приводится пример построения сетки-разбивки неоднородной области (области с включениями в форме эллиптических цилиндров и контактным слоем) методом прямого отображения, осуществляемого оператором Ляме.

На первом этапе осуществляется «грубая» дискретизация расчетной области (рис. 5). Этот этап является наиболее ответственным, так как он определяет будущую топологию результирующей сетки, и осуществляется либо «вручную», либо с использованием САД-систем.

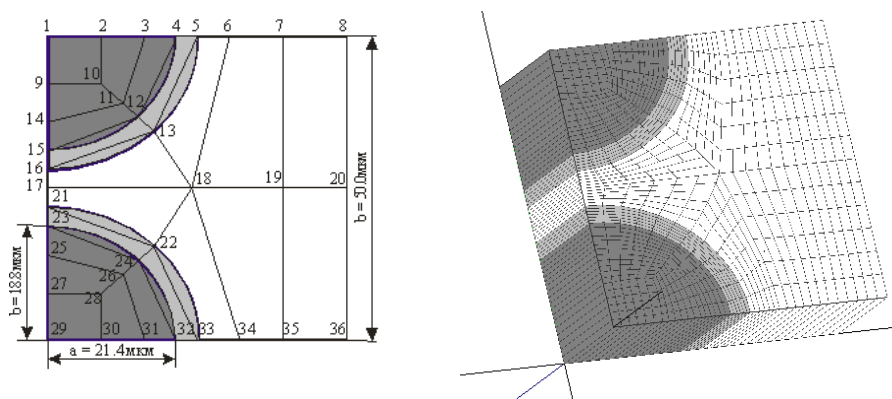


Рис. 5. Начальная «грубая» дискретизация расчетной области и сгенерированная четверть структурной ячейки периодичности композитного материала

Следующий шаг заключается в дискретизации, полученной на первом этапе сетки, до максимально возможной степени детальности, отвечающей поставленной краевой задаче.

Далее реализуется отображение области (которая представляет «грубую» конечно-элементную аппроксимацию исходной области), полученной на предыдущем этапе, на исходную неоднородную расчетную область, осуществляемое оператором Ляме. Результатом этого шага, также реализуемого программным образом, является вариант сетки разбивки расчетной области, которая представляет с достаточной степенью точности конечно-элементную аппроксимацию исходной неоднородной области.

Таким образом, результатом третьего этапа явилось построение окончательного варианта сетки расчетной области.

Итак, алгоритм генерации сетки КЭ, построенный на основе отображений оператора Ляме (упругое поле перемещений), предполагает следующую последовательность шагов:

*Этап 1.* Расчетная область составляется (формируется) из предопределенных геометрических фигур. В ходе дальнейшей генерации эти фигуры будут разбиваться на конечные элементы. Кроме того, они используются для последующего задания граничных условий. Поскольку эти геометрические фигуры будут позднее аппроксимированы конечными элементами, все необходимые атрибуты для решаемой задачи задаются на фигурах: номер материала, нагрузки, закрепления и др.

Количество фигур, составляющих расчетную область, относительно невелико (много меньше количества КЭ в будущей сетке), поэтому несложно контролировать

корректность их заведения в интерактивном режиме. Кроме того, на этапе их создания может быть очень эффективно задействован инструмент «привязки» к другим графическим объектам.

*Этап 2.* На расчетной области задается «базовая» конечно-элементная сетка. Здесь возможны 2 принципиальных варианта: «автоматический» и «ручной». В случае «автоматического» режима вся область разбивается на одинаковые (по размеру) регулярные конечные элементы выбранного типа («палетка»). В случае же «ручного» режима вся область разбивается пользователем на небольшое количество конечных элементов, уже предопределяющих будущее сгущение/разряжение сетки в отдельных подобластях + возможность использования конечных элементов различного типа. В любом случае «базовая» конечно-элементная сетка становится «стартовой» для последующей дискретизации.

*Этап 3.* Для каждого типа конечного элемента его разбиение на более мелкие составляющие осуществляется с переносом атрибутов исходных элементов на порожденные, т.е. вся «базовая» сетка дробится на более мелкие элементы соответствующих типов.

*Этап 4.* Проверяется для всех узлов новой сетки условие на попадание в заданную окрестность от границ геометрических фигур. Если узел попадает в эту окрестность — определяется кратчайшее расстояние от его положения до границы. Элементы, не лежащие внутри ни одной из фигур, исключаются из дальнейшего рассмотрения.

*Этап 5.* Решается упругая задача для новой сетки, где в качестве граничных условий используются «заданные перемещения» (кратчайшее расстояние от узла в окрестности границы до границы). Координаты узлов корректируются с учетом их смещений, полученных по результатам решения упругой задачи. При этом вся конечно-элементная сетка слегка деформируется, а часть узлов лежит точно на границах подобластей. Эта новая сетка становится «базовой» и процесс дробления для нее повторяется с этапа 3, пока степень дискретизации не удовлетворит пользователя.

Преимущества предложенной методики генерации сетки достаточно очевидны:

вся исходная информация о решаемой задаче задается на небольшом количестве объектов;

конечная сетка «предсказуема» и близка к оптимальной;

корректность сетки (проверка на «невыврожденность» КЭ) проверяется автоматически в ходе решения упругой задачи;

варьируя фиктивные деформационные параметры материалов подобластей в ходе промежуточных решений упругих задач, можно управлять характером сгенерированной сетки КЭ.

Предлагаемый подход позволяет удовлетворить основным критериям качества, предъявляемым к генерируемым конечно-элементным сеткам. На рис. 6 показана генерация конечно-элементной сетки в виде куба в реализации программного комплекса UWay [9].

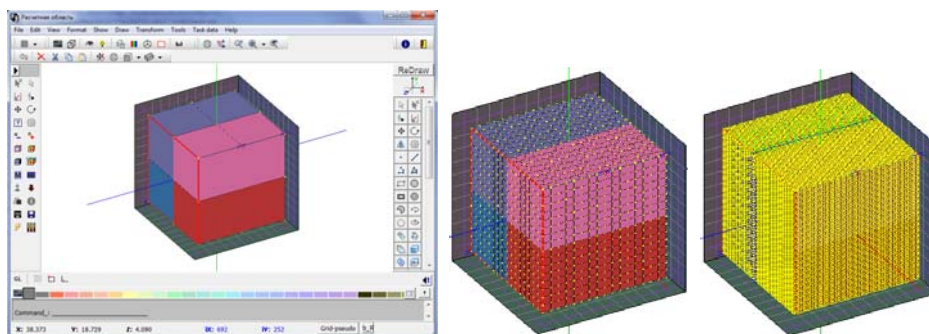


Рис. 6. Генерация конечно-элементной сетки (начальная сетка — 8 элементов, конечная ~250000 элементов)

3. Расчет эффективных деформационных характеристик композитного материала. Описанный метод построения сетки путем прямого отображения оператором Ляме использовался в задаче численного определения механических свойств композитного материала на основе эпоксидной смолы (эпоксифен) с наполнителем в виде углеродных волокон. Механические характеристики эпоксифена и углеродных волокон принимались соответственно следующими [10, 11]: модуль Юнга —  $E_m = 3300$  и  $E_f = 263000$  МПа; коэффициент Пуассона  $\nu_m = 0,35$  и  $\nu_f = 0,4$ . Расчеты выполнялись как без учета, так и с учетом контактного слоя, при этом его характеристики принимались равными: модуль Юнга  $E_c = 9900$  МПа и коэффициент Пуассона  $\nu_c = 0,35$  [12].

В расчетах предполагалось, что композитный материал является волокнистым однонаправленным и имеет периодическую структуру. Численные эксперименты проводились в 3D постановке на ячейке периодичности, структура которой может быть представлена поперечным сечением на рис. 5.

Для определения эффективных механических характеристик использовался асимптотический метод усреднения [13, 14]. Результаты расчетов показали, что однонаправленный волокнистый материал с волокнами, поперечное сечение которых представляет эллипс, сводится по механическим свойствам (табл. 1. и 2) к эффективной однородной ортотропной среде.

Табл. 1. Механические характеристики композитного материала (без контактного слоя)

Модули Юнга, МПа	$E_1 = 6134,0$	$E_2 = 7044,0$	$E_3 = 68704,0$
Коэффициенты Пуассона	$\nu_{12} = 0,448$	$\nu_{13} = 0,361$	$\nu_{23} = 0,370$
Модули сдвига, МПа	$G_{12} = 1710,0$	$G_{13} = 1868,0$	$G_{23} = 2288,0$

Табл. 2. Механические характеристики композитного материала (с контактным слоем)

Модули Юнга, МПа	$E_1 = 6960,0$	$E_2 = 9108,0$	$E_3 = 69306,0$
Коэффициенты Пуассона	$\nu_{12} = 0,4256$	$\nu_{13} = 0,3604$	$\nu_{23} = 0,3717$
Модули сдвига, МПа	$G_{12} = 1852,0$	$G_{13} = 2024,0$	$G_{23} = 2886,0$

Отметим очень хорошее соответствие между значениями модуля Юнга  $E_3$  (вдоль волокон), полученными с использованием метода асимптотического усреднения ( $E_3 = 68704,0$  МПа, см. табл. 1 и  $E_3 = 69306,0$  МПа, см. табл. 2), и полученными по правилу смесей без учета контактного слоя ( $E_3 = 68744,0$  МПа) и с учетом контактного слоя ( $E_3 = 69391,0$  МПа). Правило смесей в рассматриваемом случае имеет вид

$$E_3 = (1 - \nu_f)E_m + \nu_f E_f, \quad (9)$$

$$E_3 = (1 - \nu_f - \nu_c)E_m + \nu_f E_f + \nu_c E_c, \quad (10)$$

где  $\nu_f$  — объемная концентрация волокон;  $\nu_c$  — объемная концентрация, приходящаяся на контактный слой. В рассматриваемом случае объемная концентрация волокон составляла  $\nu_f = 0,252$ , а контактного слоя  $\nu_c = 0,098$ .

В заключение отметим, что в представленной работе, по мнению авторов, предложены оптимальные на данный момент методы дискретизации расчетной области для решения задач методом конечных элементов.

#### Библиографический список

1. Haber R., Abel J.F. // Numer. Meth. Eng., V. 18, 1982, p. 41—46.
2. Волков-Богородский Д.Б. Разработка блочного аналитико-численного метода решения задач механики и акустики // Сборник трудов школы-семинара «Композиционные материалы». М. : ИПРИМ РАН, 2000. С. 44—56.
3. Eells J., Sampson J. Harmonic mappings of Riemannian manifolds // Amer. J. Math. 1964. Vol. 86. P. 109—160.
4. Harmonic mappings. Handbook of Grid Generation / eds J.F. Thompson, B.K. Soni, N.P. Weatherill. Boca Raton etc: CRC Press, 1998.



5. Годунов С.К., Прокопов Г.П. Об использовании подвижных сеток в газодинамических расчетах // Вычисл. матем. и матем. физ. 1972. Т. 12. № 2. С. 429—440.
6. Spekreijse S.P. Elliptic grid generation based on Laplace equations and algebraic transformations // J. Comput. Phys. 1995. Vol. 118. P. 28—61.
7. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
8. Volkov-Bogorodsky D.B. On construction of harmonic maps of spatial domains by the block analytical-numerical method // Proceedings of the minisymposium “Grid generation: New trends and applications in real-world simulations” in the International conference “Optimization of finite-element approximations, splines and wavelets” (St.-Petersburg, 25—29 June 2001). Moscow: Computing Centre RAS, 2001. P. 129—143.
9. Программный комплекс «UWay». Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2011611833, 28 февраля, 2011 г. Сертификат соответствия № РОСС RU.СП15.Н00438, 27 октября, 2011 г.
10. Композиционные материалы. М.: Машиностроение, 1990. 511 с.
11. Новиков В.У. Полимерные материалы для строительства. М.: Высш. шк., 1995. 448 с.
12. Коэффициенты Пуассона межфазных слоев полимерных композитов / И.Ф. Образцов, Ю.Г. Яновский, А.Н. Власов, В.Э. Згаевский // Доклады академии наук. 2001. Т. 378. № 3. С. 336—338.
13. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984. 352 с.
14. Власов А.Н. Усреднение механических свойств структурно неоднородных сред // Механика композиционных материалов и конструкций. 2004. Т. 10. № 3. С. 424—441.

Поступила в редакцию в январе 2012 г.

Об авторах: **Власов Александр Николаевич** — доктор технических наук, ведущий научный сотрудник, **Институт прикладной механики РАН (ИПРИМ РАН)**, 119334, г. Москва, Ленинский просп., д. 32а, ведущий научный сотрудник, **Институт геоэкологии им. Е.М. Сергеева РАН (ИГЭ РАН)**, 101000, г. Москва, Уланский переулок, д. 13, стр. 2, 8 (495) 523-81-92, bah1955@yandex.ru;

**Волков-Богородский Дмитрий Борисович** — кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, **Институт прикладной механики РАН (ИПРИМ РАН)**, 119334, г. Москва, Ленинский просп., д. 32а, 8 (499) 160-42-82, v-b1957@yandex.ru;

**Знаменский Владимир Валерианович** — доктор технических наук, профессор, **ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет»**, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, (495) 589-23-37, GeoSTS@yandex.ru;

**Мнушкин Михаил Григорьевич** — кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник, **Институт геоэкологии им. Е.М. Сергеева РАН (ИГЭ РАН)**, 101000, г. Москва, Уланский переулок, д. 13, стр. 2, MiMGeoSTS@yandex.ru.

Для цитирования: Генерация нерегулярных гексаэдральных сеток / А.Н. Власов, Д.Б. Волков-Богородский, В.В. Знаменский, М.Г. Мнушкин // Вестник МГСУ. 2012. № 4. С. 78—87.

**A.N. Vlasov, D.B. Volkov-Bogorodskiy, V.V. Znamenskiy, M.G. Mnushkin**

#### GENERATION OF IRREGULAR HEXAGONAL MESHES

In the paper, the authors propose original mesh generation solutions based on the finite element method applicable within the computational domain. The mesh generation procedure contemplates homeomorphic mapping of the initial domain onto the canonical domain. The authors consider mappings generated through the application of differential operators, including the Laplace operator (harmonic mappings) or the Lamé operator. In the latter case, additional control parameter  $\nu$  is required. The following domains are regarded as canonical: a parametric cube (or a square), a cylindrical layer, and a spherical layer. They represent simply connected or biconnected domains.

The above mappings are based on the parametric mesh generated alongside the domain boundary or boundaries dividing heterogeneous elements (inclusions). Therefore, generation of the above mappings is reduced to the resolution of the boundary problems by means of the Laplace or Lamé differential operators. Basically, the proposed approach represents the problem of the theory of elasticity with regard to the prescribed displacement. This problem may have two solutions. The first one is the analytical (meshless) least square solution, and the second one represents conse-

quent mesh refining on the basis of the finite-element discretization of elasticity equations. The least square method assumes decomposition of the initial domain into the system of simply connected sub-domains. In every sub-domain, or a block, numerical/analytical approximation of homeomorphic mapping of the initial domain onto the canonical domain is performed with the help of local representations generated by means of systems of special functions.

Decomposition is performed in a constructive way and, as option, it involves meshless representation. Further, this mapping method is used to generate the calculation mesh. In this paper, the authors analyze different cases of mapping onto simply connected and bi-connected canonical domains. They represent forward and backward mapping techniques. Their potential application for generation of nonuniform meshes within the framework of the asymptotic homogenization theory is also performed to assess and project effective characteristics of heterogeneous materials (composites).

**Key words:** finite element method (FEM), mesh, block method, Laplace operator, Lamé operator, effective deformation characteristics, composite material.

#### References

1. Haber R., Abel J.F. Numer. Meth. Eng., 1982, vol. 18, pp. 41—46.
2. Volkov-Bogorodskiy D.B. *Razrabotka blochnogo analitiko-chislennogo metoda resheniya zadach mekhaniki i akustiki* [Development of the Block-based Analytical and Numerical Method of Resolution of Problems of Mechanics and Acoustics]. Collected papers, Composite Materials Workshop. Moscow, IPRIM RAN [Institute of Applied Mechanics of the Russian Academy of Sciences], 2000, pp. 44—56.
3. Eells J., Sampson J. Harmonic Mappings of Riemannian Manifolds. Amer. J. Math., 1964, vol. 86, pp. 109—160.
4. Thompson J.F., Soni B.K., Weatherill N.P., Harmonic Mappings. Handbook of Grid Generation. CRC Press, 1998.
5. Godunov S.K., Prokopov G.P. *Ob ispol'zovanii podvizhnykh setok v gazodinamicheskikh raschetakh* [On the Use of Flexible Grids in Gas-Dynamic Calculations]. *Vychislitel'naya matematika i matematicheskaya fizika* [Computational Maths and Mathematical Physics]. 1972, vol. 12, no. 2, pp. 429—440.
6. Spekreijse S.P. Elliptic Grid Generation Based on Laplace Equations and Algebraic Transformations. J. Comput. Phys., 1995, vol. 118, pp. 28—61.
7. Novatskiy V. *Teoriya uprugosti* [Theory of Elasticity]. Moscow, Mir Publ., 1975, 872 p.
8. Volkov-Bogorodskiy D.B. On Construction of Harmonic Maps of Spatial Domains by the Block Analytical-Numerical Method. Proceedings of the minisymposium "Grid Generation: New Trends and Applications in Real-World Simulations", International Conference "Optimization of Finite-Element Approximations, Splines and Wavelets", St.Petersburg, 25—29 June 2001. Moscow, Computing Centre RAS, 2001, pp. 129—143.
9. UWay Software. Certificate of State Registration of Software Programme no. 2011611833, issued on 28 February 2011. Compliance Certificate ROSS RU.SP15.N00438, issued on 27 October 2011.
10. *Kompozitsionnye materialy* [Composite Materials]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1990, 511 p.
11. Novikov V.U. *Polimernye materialy dlya stroitel'stva* [Polymeric Materials for Construction Purposes]. Moscow, Vysshaya. Shkola Publ., 1995, 448 p.
12. Obratsov I.F., Yanovskiy Yu.G., Vlasov A.N., Zgaevskiy V.E. *Koeffitsienty Puassona mezhfaznykh sloev polimernykh kompozitov* [Poisson Ratios for Interphase Layers of Polymeric Composites]. Academy of Science Reports, 2001, vol. 378, no. 3, pp. 336—338.
13. Bakhvalov N.S., Panasenko G.P. *Osrednenie protsessov v periodicheskikh sredakh* [Averaging of Processes in Periodic Media]. Moscow, Nauka Publ., 1984, 352 p.
14. Vlasov A.N. *Usrednenie mekhanicheskikh svoystv strukturno neodnorodnykh sred*. [Averaging of Mechanical Properties of Structurally Heterogeneous Media]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksiy* [Mechanics of Composite Materials and Structures]. 2004, vol. 10, no. 3, pp. 424—441.

About the authors: **Vlasov Aleksandr Nikolaevich** — Doctor of Technical Sciences, Principal Researcher, **Institute of Applied Mechanics of the Russian Academy of Sciences (IAM RAS)**, 32a Leningradskiy prospekt, Moscow, 119334, Russian Federation; Principal Researcher, **Sergeev Institute of Environmental Geoscience of the Russian Academy of Sciences (IEG RAS)**, Building 2, 13 Ulanskiy pereulok, 101000, Moscow, Russian Federation; bah1955@yandex.ru; +7 (495) 523-81-92;

**Volkov-Bogorodskiy Dmitriy Borisovich** — Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, **Institute of Applied Mechanics of the Russian Academy of Sciences (IAM RAS)**, 32a Leningradskiy prospekt, Moscow, 119334, Russian Federation; v-b1957@yandex.ru; +7 (499) 160-42-82;

**Znamenskiy Vladimir Valerianovich** — Doctor of Technical Sciences, Professor, **Moscow State University of Civil Engineering (MSUCE)**, 26 Yaroslavskoe shosse, Moscow, 129337, Russian Federation; GeoSTS@yandex.ru; +7 (495) 589-23-37;

**Mnushkin Mikhail Grigor'evich** — Candidate of Technical Sciences, Principal Researcher, **Sergeev Institute of Environmental Geoscience Russian Academy of Sciences (IEG RAS)**, Building 2, 13 Ulanskiy pereulok, 101000, Moscow, Russian Federation; MiMGeoSTS@yandex.ru.

For citation: Vlasov A.N., Volkov-Bogorodskiy D.B., Znamenskiy V.V., Mnushkin M.G. *Generatsiya neregulyarnykh geksaedralnykh setok* [Generation of Irregular Hexagonal Meshes]. *Vestnik MGSU* [Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering]. 2012, no. 4, pp. 78—87.