

## ПРОЕКТИРОВАНИЕ И КОНСТРУИРОВАНИЕ СТРОИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ. ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ В СТРОИТЕЛЬСТВЕ

УДК 539.3

В.И. Андреев, Е.В. Барменкова, А.В. Матвеева

ФГБОУ ВПО «МГСУ»

### ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕОДНОРОДНОЙ УПРУГОЙ БАЛКИ ПРИ СЛОЖНОМ СОПРОТИВЛЕНИИ

Описан метод оптимизации напряженного состояния упругой балки, подверженной одновременному действию центрально приложенной сосредоточенной силы и изгибающего момента. Способ оптимизации основан на решении обратной задачи сопротивления материалов, суть которой заключается в определении закона изменения модуля упругости по высоте сечения балки, при котором напряженное состояние будет заданным.

**Ключевые слова:** оптимизация, сложное сопротивление, неоднородная упругая балка, модуль упругости, приведенная жесткость, нормальные напряжения.

Большинство задач теории упругости неоднородных тел решается в прямой постановке [1—3], суть которой заключается в определении напряженно-деформированного состояния тела при известных зависимостях упругих характеристик материала от координат. Известны также некоторые решения обратных задач теории упругости [4—6], в которых определяются зависимости механических характеристик (как правило, модуля Юнга) от координат, при которых напряженное состояние тела будет заданным. В частности, решение обратных задач позволяет оптимизировать напряженное состояние тел, снижая уровень наибольших напряжений за счет искусственного уменьшения модуля упругости материала в соответствующей зоне [7].

При действии на балку продольной силы и постоянного изгибающего момента эпюра напряжений  $\sigma_x(y) = \sigma(\ )$  в однородной балке будет иметь трапециевидный характер (рис. 1). Достаточно очевидно, что, если в нижней части балки модуль упругости будет меньше, чем в верхней части, эпюра  $\sigma(y)$  будет выравниваться, приближаясь к постоянному значению.

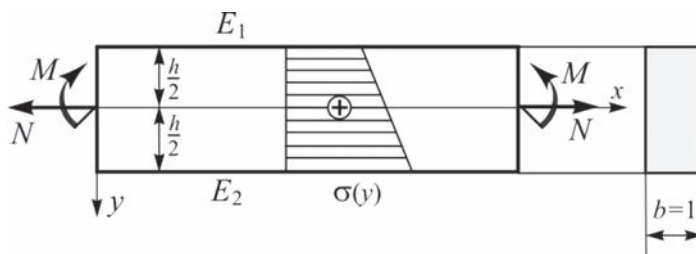


Рис. 1. Расчетная схема балки, испытывающей растяжение и изгиб под действием приложенных нагрузок

В работе поставлена и решена задача по отысканию такой зависимости  $E(y)$ , при которой напряжения  $\sigma$  будут постоянны по сечению. Будем решать задачу сложного сопротивления (случай центрального растяжения и плоского изгиба). В качестве примера рассмотрим балку прямоугольного сечения со следующими характеристиками:  $b = 1$  м,  $h = 10$  м,  $E_1 = 10^7$  кПа (значение модуля упругости при  $y = -h/2$ ),  $E_2 = 10^6$  кПа (значение модуля упругости при  $y = h/2$ ). В качестве нагрузок примем  $M = 1000$  кНм,  $N = 1200$  кН.

В основу решения положен итерационный метод. В качестве начального решения  $\sigma^{(0)}$  примем решение для однородного материала. В качестве первого приближения рассмотрим напряженное состояние балки, когда модуль упругости изменяется по линейному закону:

$$E^{(1)}(y) = \frac{E_1 + E_2}{2} + \frac{E_2 - E_1}{h} y. \quad (1)$$

Нормальные напряжения  $\sigma_1$  можно вычислить по формуле [9]

$$\sigma^{(1)}(y) = E^{(1)}(y) \left( \frac{N}{[EF]} + \frac{M_z y}{[EI_z]} \right), \quad (2)$$

где  $[EF] = \int_{-h/2}^{h/2} b \cdot E^{(1)}(y) dy$  — приведенная жесткость при растяжении — сжатии;

$$[EI_z] = \int_{-h/2}^{h/2} b \cdot y^2 E^{(1)}(y) dy \text{ — приведенная изгибная жесткость сечения.}$$

Подставляя (1) в две последние формулы, получим

$$\begin{aligned} [EF]_I &= \int_{-h/2}^{h/2} b \cdot E^{(1)}(y) dy = bhE_{cp} = 5,5 \cdot 10^7 \text{ кН}; \\ [EI_z]_I &= \int_{-h/2}^{h/2} b \cdot y^2 E^{(1)}(y) dy = \frac{bh^3}{12} E_{cp} = 4,583 \cdot 10^8 \text{ кН} \cdot \text{м}^2, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $E_{cp} = (E_1 + E_2)/2$ .

После интегрирования выражений (3) и подстановки их в (2) получим

$$\sigma^{(1)}(y) = E^{(1)}(y) \left( \frac{N}{bhE} + \frac{12M_z y}{bh^3 E} \right).$$

Из этой формулы определим функцию  $E^{(2)}(y)$ , при которой  $\sigma_1 = \text{const}$ :

$$E^{(2)}(y) = \sigma_{\text{const}} / \left( \frac{N}{bhE} + \frac{12M_z y}{bh^3 E} \right).$$

Таким образом, получили распределение модуля упругости по высоте сечений, при котором  $\sigma = \text{const}$ . Распределение  $E^{(2)}(y)$  представлено в виде таблицы, а также в виде графика изменения функции  $E^{(2)}(y)$  (рис. 2).

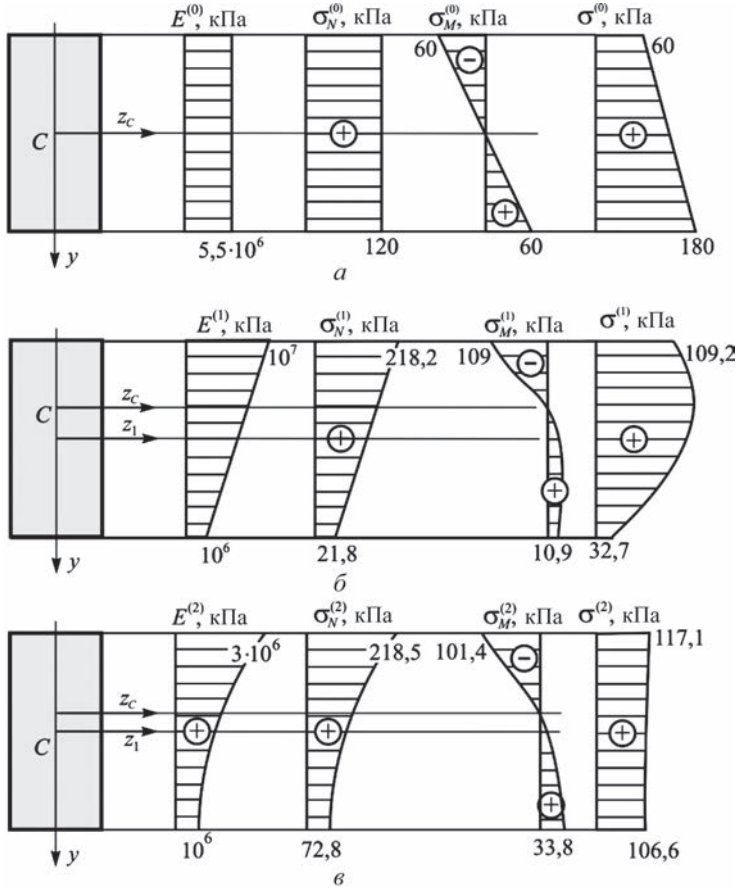


Рис. 2. Эпюры нормальных напряжений  $\sigma$ , возникающих в балках с постоянным (а) и с переменным модулем упругости (б, в)

Определим напряжения  $\sigma = \sigma^{(2)}(y)$ , используя полученную зависимость для  $E(y) = E^{(2)}(y)$ .

$$\sigma^{(2)}(y) = E^{(2)}(y) \left( \frac{N}{\int_{-h/2}^{h/2} b \cdot E^{(2)}(y) dy} + \frac{M_z y}{\int_{-h/2}^{h/2} b \cdot y^2 E^{(2)}(y) dy} \right).$$

Жесткость на изгиб и жесткость при растяжении, входящие в формулу (3), уменьшаются по сравнению со значениями жесткостей в формуле для  $\sigma^{(1)}(y)$  (2):

$$[EF]_2 = \int_{-h/2}^{h/2} b \cdot E^{(2)}(y) dy = \sigma_{\text{const}} b E_{\text{cp}} \frac{bh^3}{12M} \ln \left( \frac{Nh + 6M}{Nh - 6M} \right) = 1,65 \cdot 10^7 \text{ кН};$$

$$[EI_z]_2 = \int_{-h/2}^{h/2} b \cdot y^2 E^{(2)}(y) dy =$$

$$= \sigma_{\text{const}} E \left( \frac{bh^3}{12} \right)^2 \frac{N}{12M^3} \left( -12M + Nh \ln \left( \frac{Nh + 6M}{Nh - 6M} \right) \right) = 1,48 \cdot 10^8 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

Выражение для  $\sigma^{(2)}(y)$  принимает следующий вид:

$$\sigma^{(2)}(y) = \frac{M_z}{\frac{bh^3}{12} \left( \frac{N}{bh} + \frac{12M_z y}{bh^3} \right)} \left( \frac{N}{b \ln \left( \frac{Nh+6M}{Nh-6M} \right)} + \frac{12M_z^3 y}{\frac{bh^3}{12} N \left( -12M + Nh \ln \left( \frac{Nh+6M}{Nh-6M} \right) \right)} \right).$$

Таким образом, в формулу для определения  $\sigma^{(2)}(y)$  не входят заданные значения  $E_1, E_2$  и  $\sigma_{const}$ .

Нейтральный слой в балке с переменным модулем упругости смещается, при этом координата центра тяжести приведенного сечения относительно оси  $z_1$  (см. рис. 2) вычисляется по формуле

$$y_c = \frac{[ES_{z_1}]_i}{[EF]_i}, \quad i = 1, 2, \dots,$$

где  $[ES_{z_1}]_i$  — статический момент приведенного сечения относительно оси  $z_1$ ,

$$[ES_{z_1}]_i = \int_{-h/2}^{h/2} byE_i(y)dy.$$

Таким же образом можно вычислить и следующее — третье — приближение. На рис. 2, б, в, г показаны эпюры, соответствующие решению для балки, в которой модуль упругости является функцией  $E_i(y)$ . На рисунках напряжения  $\sigma^N$  соответствуют изменению напряжений по высоте сечения, возникающих в результате действия продольной силы, напряжения  $\sigma^M$  — в результате действия изгибающего момента,  $\sigma$  — в результате действия и продольной силы, и изгибающего момента. Для сравнения на рис. 2, а приведены эпюры напряжений в балке, материал которой является однородным, т.е. модуль упругости  $E = const = E_{cp}$ . Результаты расчетов также приведены в таблице. Судя по результатам, можно утверждать, что в рассмотренной задаче вполне достаточно трех приближений.

Значения модуля упругости  $E^{(i)}$  и суммарных напряжений  $\sigma^{(i)}$  для трех этапов итерационного процесса, кПа

$y, \text{ м}$	$E^{(0)}$	$\sigma^{(0)}$	$E^{(1)}(y)$	$\sigma^{(1)}$	$E^{(2)}(y)$	$\sigma^{(2)}$	$E^{(3)}(y)$	$\sigma^{(3)}$
-5	5,5·10 <sup>6</sup>	60	1·10 <sup>7</sup>	109,2	3·10 <sup>6</sup>	117,1	8,39·10 <sup>5</sup>	110,75
-4		72	9,1·10 <sup>6</sup>	119,1	2,5·10 <sup>6</sup>	114,4	7,15·10 <sup>5</sup>	110,70
-3		84	8,2·10 <sup>6</sup>	125,2	2,1·10 <sup>6</sup>	112,6	6,23·10 <sup>5</sup>	110,66
-2		96	7,3·10 <sup>6</sup>	127,4	1,9·10 <sup>6</sup>	111,2	5,52·10 <sup>5</sup>	110,64
-1		108	6,4·10 <sup>6</sup>	125,7	1,7·10 <sup>6</sup>	110,1	4,95·10 <sup>5</sup>	110,61
0		120	5,5·10 <sup>6</sup>	120	1,5·10 <sup>6</sup>	109,2	4,49·10 <sup>5</sup>	110,60
1		132	4,6·10 <sup>6</sup>	110,4	1,4·10 <sup>6</sup>	108,5	4,11·10 <sup>5</sup>	110,58
2		144	3,7·10 <sup>6</sup>	96,9	1,3·10 <sup>6</sup>	107,9	3,79·10 <sup>5</sup>	110,57
3		156	2,8·10 <sup>6</sup>	79,4	1,2·10 <sup>6</sup>	107,4	3,52·10 <sup>5</sup>	110,56
4		168	1,9·10 <sup>6</sup>	58,0	1,1·10 <sup>6</sup>	107,0	3,28·10 <sup>5</sup>	110,55
5	180	1·10 <sup>6</sup>	32,7	1·10 <sup>6</sup>	106,6	3,07·10 <sup>5</sup>	110,54	

Обратим внимание на следующие особенности эпюр нормальных напряжений  $\sigma$  с постоянным и переменным модулем упругости:

эпюры напряжений  $\sigma^M$  с переменным модулем упругости отличаются качественно, так как вместо линейной зависимости имеем нелинейную;

в неоднородных балках в зонах, где модуль упругости меньше, напряжения уменьшаются по сравнению с однородным материалом, и наоборот;

эпюра напряжений  $\sigma^{(2)}$ , для получения которой определяли распределение модуля упругости по высоте сечений  $E(y) = E^{(2)}(y)$ , по сравнению с  $\sigma^{(1)}$  изменяется существенно, приближаясь к постоянной, а в случае  $E(y) = E^{(3)}(y)$  напряжения практически постоянны (см. табл.).

Полученные результаты позволяют использовать их для оценки прочности балки и ее оптимизации. Поскольку напряженное состояние балки является одноосным, все теории прочности будут давать одинаковый результат, который можно свести к формуле

$$\sigma_{\max} \leq R,$$

где  $R$  — некая предельная характеристика для данного материала. В случае однородного материала напряжения в крайних волокнах отличаются в 2,5 раза, откуда следует, что балка в целом недогружена. В неоднородной балке для случая  $E(y) = E^{(3)}(y)$  напряжения постоянны по сечению, что позволяет использовать весь материал балки, что в целом повышает эффективность ее работы. Существенное снижение напряжений (более чем в 1,6 раза) по сравнению с однородной балкой позволяет повысить нагрузки, уменьшить размеры балки и т.д. По аналогии с [7] введем коэффициент эффективности работы неоднородной балки:

$$\beta = \sigma_{\max}^{(1)} / \sigma_{\max}^{(2)}.$$

Здесь соответственно  $\sigma_{\max}^{(1)}$  и  $\sigma_{\max}^{(2)} = \text{const}$  максимальные напряжения в неоднородной и однородной балках. В рассмотренном случае этот коэффициент равен  $\beta = 1,64$ .

Естественно, возникает вопрос, как создать балку с непрерывным изменением ее жесткости по высоте сечения. По-видимому, современные технологии не позволят этого добиться с достаточной точностью. Можно лишь предложить способ создания кусочно-однородной конструкции, как это было сделано в [7]. При этом коэффициент  $\beta$  для многослойной балки будет меньше, чем в балке с непрерывной неоднородностью, но с увеличением количества слоев он будет приближаться к указанному выше значению, что даст экономический эффект.

В заключение следует добавить, что в мире вопросам оптимизации конструкций уделяется большое внимание, что подтверждается регулярным проведением международных конференций Optimum Design of Structures and Materials in Engineering. Можно также указать работы зарубежных авторов [8—10], опубликованные в последнее время.

### Библиографический список

1. *Соболевский В.В.* Некоторые случаи интегрирования обыкновенного дифференциального уравнения, описывающего напряженное состояние анизотропного неоднородного и неравномерно нагретого полого шара // Изв. АН БССР. Сер. Физ.-техн. наук. 1963. № 2. С. 20—29.

2. *Житков П.Н.* Плоская задача теории упругости неоднородного ортотропного тела в полярных координатах // Тр. Воронеж. гос. ун-та. Физ.-мат. : сб. 1954. Т. XXVII. С. 30—35.
3. *Ростовцев Н.А.* К теории упругости неоднородных тел // Прикладная математика и механика. 1964. Т. 28. Вып. 4. С. 601—611.
4. *Лехницкий С.Г.* Радиальное распределение напряжений в клине и полуплоскости с переменным модулем упругости // Прикладная математика и механика. 1962. Т. XXVI. Вып. 1. С. 146—151.
5. *Торлин В.Н.* Прямая и обратная задачи теории упругости для неоднородного тела // Прикладная механика. 1976. Т. XII. № 3. С. 28—35.
6. *Андреев В.И., Потехин И.А.* О способе создания оптимальных конструкций на основе решения обратных задач теории упругости неоднородных тел // РААСН, Вестник отделения строительных наук. 2007. № 11. С. 48—52.
7. *Andreev V.I.* Optimization of thick-walled shells based on solutions of inverse problems of the elastic theory for inhomogeneous bodies // Computer Aided Optimum Design in Engineering. 2012, pp. 189—202.
8. *Kravanja S., Žlender B.* Optimization of the underground gas storage in different rock environments // Computer Aided Optimum Design in Engineering. 2012, pp. 15—26.
9. *Issa H.K.* Simplified structural analysis of steel portal frames developed from structural optimization // Computer Aided Optimum Design in Engineering. 2012, pp. 47—58.
10. *Syngellakis S.* Longitudinal buckling of slender pressurized tubes // Fluid Structure Interaction XII. 2013, pp. 133—144.

*Поступила в редакцию в ноябре 2013 г.*

Об авторах: **Андреев Владимир Игоревич** — доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой сопротивлений материалов, **Московский государственный строительный университет (ФГБОУ ВПО «МГСУ»)**, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, asv@mgsu.ru;

**Барменкова Елена Вячеславовна** — кандидат технических наук, доцент кафедры сопротивления материалов, **Московский государственный строительный университет (ФГБОУ ВПО «МГСУ»)**, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, elena\_yurs@mail.ru;

**Матвеева Алена Владимировна** — аспирант кафедры сопротивления материалов, **Московский государственный строительный университет (ФГБОУ ВПО «МГСУ»)**, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, malina89.89@mail.ru.

Для цитирования: *Андреев В.И., Барменкова Е.В., Матвеева А.В.* Обратная задача для неоднородной упругой балки при сложном сопротивлении // Вестник МГСУ. 2014. № 1. С. 25—32.

**V.I. Andreev, E.V. Barmenkova, A.V. Matveeva**

#### **INVERSE PROBLEM FOR AN INHOMOGENEOUS ELASTIC BEAM AT A COMBINED STRENGTH**

In the article the authors describe a method of optimizing the stress state of an elastic beam, subject to the simultaneous action of the central concentrated force and bending moment. The optimization method is based on solving the inverse problem of the strength of materials, consisting in defining the law of changing in elasticity modulus with beam cross-section altitude. With this changing the stress state will be preset.

Most problems of the elasticity theory of inhomogeneous bodies are solved in direct formulation, the essence of which is to determine the stress-strain state of a body at the known dependences of the material elastic characteristics from the coordinates. There are also some solutions of the inverse problems of the elasticity theory, in which the dependences of the mechanical characteristics from the coordinates, at which the stress state of a body is preset, are determined. In the paper the authors solve the problem of finding a dependence modulus of elasticity, where the stresses will be constant over the beam's cross section. We will solve the problem of combined strength (in the case of the central stretching and bending). We will use an iterative method. As the initial solution, we take the solution for a homogeneous material. As the first approximation, we consider the stress state of a beam, when the modulus of elasticity varies linearly. According to the results, it can be stated that three approximations are sufficient in the considered problem. The obtained results allow us to use them in assessing the strength of a beam and its optimization.

**Key words:** optimization, combined strength, inhomogeneous elastic beam, elastic modulus, scaled rigidity, direct stress.

### References

1. Sobolevskiy V.V. Nekotorye sluchai integrirvaniya obyknovennogo differentsial'nogo uravneniya, opisuyayushchego napryazhennoe sostoyanie anizotropnogo neodnorodnogo i neravnomerno nagretogo pologo shara [Some Cases of Integration of an Ordinary Differential Equation Describing the Stress State of Anisotropic Inhomogeneous and Non-uniformly Heated Hollow Sphere]. *Izvestiya AN BSSR. Seriya Fiziko-tekhnicheskikh nauk* [News of the Academy of Sciences of Belorussia. Physical and Technical Sciences Series]. 1963, no. 2, pp. 20—29.
2. Zhitkov P.N. Ploskaya zadacha teorii uprugosti neodnorodnogo ortotropnogo tela v polyarnykh koordinatakh [The Plane Problem of Elasticity Theory of Inhomogeneous Orthotropic Body in Polar Coordinates]. *Trudy Voronezhskogo gosudarstvennogo universitetata. Fiz.-mat.: sbornik* [Works of Voronezh State University. Physics and Mathematics: Collection]. 1954, vol. XXVII, pp. 30—35.
3. Rostovtsev N.A. K teorii uprugosti neodnorodnykh tel [The Theory of Elasticity of Inhomogeneous Bodies]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics]. 1964, vol. 28, no. 4, pp. 601—611.
4. Lekhnitskiy S.G. Radial'noe raspredelenie napryazheniy v kline i poluploskosti s peremennym modulem uprugosti [The Radial Distribution of Stresses in the Wedge and Half-plane with Variable Modulus of Elasticity]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics]. 1962, vol. XXVI, no. 1, pp. 146—151.
5. Torlin V.N. Pryamaya i obratnaya zadachi teorii uprugosti dlya neodnorodnogo tela [Direct and Inverse Problems of the Theory of Elasticity for an Inhomogeneous Body]. *Prikladnaya mekhanika* [Applied Mechanics]. 1976, vol. XII, no. 3, pp. 28—35.
6. Andreev V.I., Potekhin I.A. O sposobe sozdaniya optimal'nykh konstruksiy na osnove resheniya obratnykh zadach teorii uprugosti neodnorodnykh tel [On the Method of Creating Optimal Constructions Basing on the Solution of Inverse Problems of the Elasticity Theory of Inhomogeneous Bodies]. *RAASN, Vestnik otdeleniya stroitel'nykh nauk* [Russian Academy of Construction Sciences. Proceedings of the Department of Construction Sciences]. 2007, no. 11, pp. 48—52.
7. Andreev V.I. Optimization of Thick-walled Shells Based on Solutions of Inverse Problems of the Elastic Theory for Inhomogeneous Bodies. *Computer Aided Optimum Design in Engineering*. 2012, pp. 189—202.
8. Kravanja S., Žlender B. Optimization of the Underground Gas Storage in Different Rock Environments. *Computer Aided Optimum Design in Engineering*. 2012, pp. 15—26.
9. Issa H.K. Simplified Structural Analysis of Steel Portal Frames Developed from Structural Optimization. *Computer Aided Optimum Design in Engineering*. 2012, pp. 47—58.
10. Syngellakis S. Longitudinal Buckling of Slender Pressurized Tubes. *Fluid Structure Interaction XII*. 2013, pp. 133—144.

About the authors: **Andreev Vladimir Igorevich** — Doctor of Technical Science, professor, head, Department of the Strength of materials, **Moscow State University of Civil Engineering (MGSU)**, 26 Yaroslavskoe shosse, Moscow, 129337, Russian Federation; asv@mgsu.ru;

**Barmenkova Elena Vyacheslavovna** — Candidate of Technical Science, Associate Professor, Department of the Strength of materials, **Moscow State University of Civil Engineering (MGSU)**, 26 Yaroslavskoe shosse, Moscow, 129337, Russian Federation; elena\_yurs@mail.ru;

**Matveeva Alena Vladimirovna** — postgraduate student, Department of the Strength of materials, **Moscow State University of Civil Engineering (MGSU)**, 26 Yaroslavskoe shosse, Moscow, 129337, Russian Federation; malina89\_89@mail.ru.

For citation: Andreev V.I., Barmenkova E.V., Matveeva A.V. Obratnaya zadacha dlya neodnorodnoy uprugoy balki pri slozhnom soprotivlenii [Inverse Problem for an Inhomogeneous Elastic Beam at a Combined Strength]. *Vestnik MGSU* [Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering]. 2014, no. 1, pp. 25—32.