

УДК 624.044

А.Р. Туснин, М. Прокич

ФГБОУ ВПО «МГСУ»

ПРОЧНОСТЬ ДВУТАВРОВЫХ ПРОФИЛЕЙ ПРИ СТЕСНЕННОМ КРУЧЕНИИ С УЧЕТОМ РАЗВИТИЯ ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ

В действующих нормах, используемых при проектировании стальных конструкций, отсутствуют рекомендации для расчета с учетом развития пластических деформаций при стесненном кручении. Приведено теоретическое обоснование коэффициента, учитывающего развитие пластических деформаций, для балок двутаврового сечения при действии бимоента. Дана практическая методика для расчета двутавров на стесненное кручение, соответствующая российским нормам по проектированию стальных конструкций.

Ключевые слова: стесненное кручение, прочность, пластичность, коэффициент для учета пластических деформаций, бимомент, пластическая деформация.

В строительных конструкциях широкое применение нашли тонкостенные стальные стержни открытого профиля. В ряде случаев такие стержни испытывают крутящие воздействия. Кручение тонкостенного стержня открытого профиля при стеснении депланации сечения ведет к появлению дополнительных напряжений, которые вносят существенный вклад в суммарные напряжения. Несущая способность стержней при стесненном кручении изучена только для ряда отдельных случаев и в основном в упругой стадии работы материала.

В действующем Своде правил по проектированию стальных конструкций проверка прочности внецентренно-сжатых (сжато-изгибаемых) и внецентренно-растянутых (растянуто-изгибаемых) элементов при отсутствии динамических воздействий выполняется по формуле¹

$$\left(\frac{N}{A_n R_y \gamma_c} \right)^n + \frac{M_x}{c_x W_{xn, \min} R_y \gamma_c} + \frac{M_y}{c_y W_{yn, \min} R_y \gamma_c} + \frac{B_\omega}{W_{\omega n, \min} R_y \gamma_c} \leq 1,$$

где N , M_x , M_y , B_ω — абсолютные значения внутренних усилий в сечении в рассматриваемом сочетании; n , c_x , c_y — коэффициенты, учитывающие развитие пластических деформаций в сечении.

Из приведенной формулы видно, что при расчете на прочность существуют коэффициенты для учета пластических деформаций от растяжения (сжатия) и изгиба. Для изгибно-крутильного бимоента прочность определяется без учета развития пластических деформаций.

Расчет тонкостенных стержней открытого профиля с учетом пластических деформаций позволит более корректно определить их несущую способность и требует дальнейшего исследования, так как за счет пластических деформаций имеются определенные резервы несущей способности, выявляе-

¹ СП 16.13330.2011. Стальные конструкции. М. : ОАО «ЦПП», 2011. 172 с.

ние которых представляет значительный практический интерес. Разработка методики расчета тонкостенных стержней с учетом развития пластических деформаций позволит повысить надежность проектирования металлических конструкций.

Стесненное кручение тонкостенных стержней открытого профиля в упругой стадии изучили В.З. Власов и С.П. Тимошенко [1, 2] и их теории были подтверждены экспериментально в работе С.Р. Фарвелла и Т.В. Галамбоса [3]. Теоретические исследования пластического разрушения консольных стержней при стесненном кручении проводили К.С. Динно, У. Мерчант и предложили определять несущую способность стержня в пластической стадии отдельно для двух составляющих: чистого и стесненного кручения, а затем их суммировать [4].

Ю.Л. Пи и Н.С. Трехйер [5] исследовали поведение стальных двутавровых балок при стесненном кручении, и показали, что исчерпание несущей способности такого элемента происходит вследствие пластического разрушения полки и при больших углах закручивания, возникающих до образования пластического шарнира в балке.

Н.С. Трехйер [6, 7] получил выражения пластического бимоента $B_{пл}$ для ряда профилей. Для некоторых профилей показан механизм и порядок определения $B_{пл}$. Для симметричного двутавра получено значение $B_{пл}$, но не показан порядок его определения, что представляет интерес для разработки практической методики расчета.

В статье приведено теоретическое обоснование определения пластического бимоента и представлен порядок определения коэффициента для расчета с учетом пластических деформаций при стесненном кручении.

Резервы несущей способности стержня за счет развития пластических деформаций уже выявлены при работе стержней на изгиб, а также при растяжении и сжатии. Рассмотрим существующую методику определения этих резервов и коэффициента учитывающего пластические деформации при изгибе. Это позволит понять, каким образом удалось решить данную задачу для изгибаемых стержней и наметить возможные пути теоретических исследований несущей способности тонкостенных стержней при кручении с учетом развития пластических деформаций.

При изгибе балок, сечение которых имеет две оси симметрии, возможны три стадии работы: упругая, упругопластическая и пластическая [8]. После достижения предела текучести в крайних волокнах изгибаемых элементов, пластические деформации с ростом изгибающего момента распространяются вглубь сечения и в предельном состоянии охватывают все сечение, образуя «шарнир пластичности». При образовании шарнира пластичности эпюра нормальных напряжений будет представлять собой два прямоугольника (рис. 1, d [2]). На рис. 1, c показана стадия упруго-пластической работы, на которой упругое ядро высотой a ($\sigma < \sigma_T$), при увеличении изгибающего момента будет уменьшаться. Полное исчерпание несущей способности балки наступит, когда пластические деформации распространятся по всему сечению, т.е. при $a \rightarrow 0$, а момент станет равным предельному моменту $M_{пл}$.

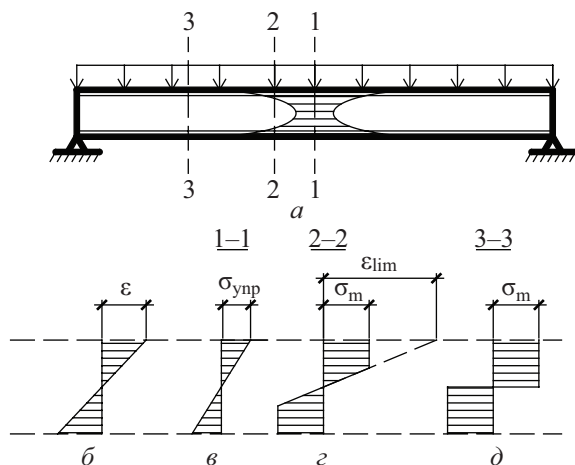


Рис. 1. Работа изгибаемого элемента под нагрузкой: *a* — развитие пластических деформаций по длине балки; *б* — эпюра относительных деформаций; *в–д* — эпюры напряжений в разных сечениях 1—3; *в* — упругое состояние в сечении 1—1; *г* — упругопластическое состояние при наличии упругого ядра в сечении 2—2; *д* — шарнир пластичности в сечении 3—3

Для определения предельного изгибающего момента при образовании шарнира пластичности используем выражение

$$M_{\text{пл}} = \sigma_T \int_A y dA = \sigma_T (|S_p| + |S_c|) = \sigma_T W_{\text{пл}},$$

где S_p — статический момент растянутой части сечения относительно нейтральной оси; S_c — то же сжатой части; $W_{\text{пл}}$ — пластический момент сопротивления, который представляет собой сумму абсолютных значений статических моментов сжатой и растянутой зон сечения балки [9].

Коэффициент, показывающий увеличение прочности балки, из-за развития пластических деформаций, определяется как отношение пластического и упругого изгибающих моментов:

$$c = \frac{M_{\text{пл}}}{M} = \frac{\sigma_T W_{\text{пл}}}{\sigma_T W} = \frac{W_{\text{пл}}}{W}.$$

Следовательно, для определения коэффициента c необходимо (для любого профиля) найти отношение пластического момента сопротивления к упругому моменту сопротивления. Для прямоугольного сечения это значение вычисляется достаточно просто:

$$c = \frac{W}{W} = \frac{2S}{2I/h} = \frac{bh^2/4}{bh^2/6} = 1,5,$$

т.е. с учетом развития пластических деформаций прочность балки, имеющей прямоугольное сечение, в 1,5 раза больше, чем в упругой стадии.

С учетом фактической диаграммы работы стали реальный пластический момент несколько отличается от теоретического (в запас несущей способности) [2].

В нормативных документах учитывается, что в районе нейтральной оси сохраняется упругое ядро и пластический шарнир развивается не полностью. В результате этого нормативное значение коэффициента c получается несколь-

ко меньше, чем теоретическое. О величине снижения можно судить по прямоугольному сечению, для которого теоретическое значение $c_T = 1,5$, а нормативное $c_{II} = 1,47$. Похожее соотношение имеет место и для других сечений.

Применим аналогичный подход для стесненного кручения при действии изгибно-крутильного бимоента на балку двутаврового сечения. При анализе напряженно-деформированного состояния балки использованы положения теории В.З. Власова [10].

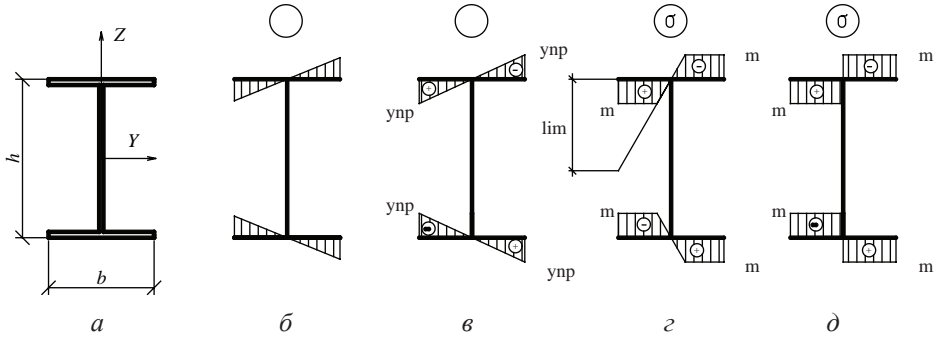


Рис. 2. Деформации и секториальные нормальные напряжения в симметричном двутавровом сечении при стесненном кручении: а — схема симметричного двутаврового сечения; б — эпюра относительных деформаций в полках; в–д — эпюры напряжений в разных стадиях: в — упругое состояние; г — упругопластическое состояние при наличии упругого ядра; д — шарнир пластичности

Коэффициент, учитывающий пластическую работу профиля при стесненном кручении, будет определяться как отношение пластического бимоента к упругому.

$$c_{\omega} = \frac{B_{пл.}}{B_{упр}}; B_{упр} = \frac{\sigma_T I_{\omega}}{\omega} = \sigma_T W_{упр}.$$

Пластический бимоент равен произведению пластических моментов, возникающих в полках, на расстояние между ними (рис. 3):

$$B_{пл.} = M_{пл} h = \sigma_T W_{пл}.$$

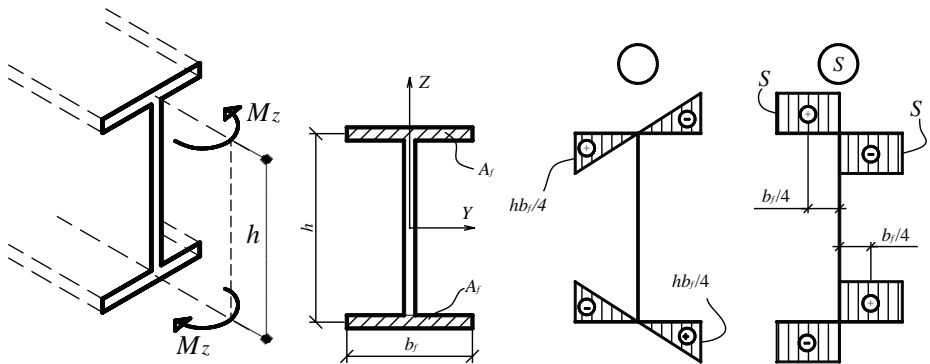


Рис. 3. Определение пластического бимоента

Пластический момент, действующий в полках, распишем по аналогии с изгибом балок.

$$M_{пл} = W_{f,пл} \sigma_T = (|S_{f,сж}| + |S_{f,рас}|) \sigma_T = \left(\frac{A_f b_f}{2} \frac{b_f}{4} + \frac{A_f b_f}{2} \frac{b_f}{4} \right) \sigma_T.$$

Тогда $B_{пл} = (|S_{f,сж}| + |S_{f,рас}|) \sigma_T h = \left(\frac{A_f b_f}{2} \frac{b_f}{4} h + \frac{A_f b_f}{2} \frac{b_f}{4} h \right) \sigma_T.$

Обозначим $\frac{A_f h b_f}{2} \frac{b_f}{4} = S_{\omega} ; \quad \frac{A_f b_f h}{4} \frac{b_f}{2} = S_{\omega} ;$

$$B_{пл} = W_{\omega,пл} \sigma_T = (|S_{\omega,сж}| + |S_{\omega,рас}|) \sigma_T.$$

Секториальный момент сопротивления в пластической стадии равен

$$W_{\omega,пл} = (|S_{\omega,сж}| + |S_{\omega,рас}|).$$

Коэффициент для учета пластических деформаций будет равен

$$c_{\omega} = \frac{B_{пл}}{B_{упр}} = \frac{W_{\omega,пл}}{W_{\omega,упр}};$$

$$W_{\omega} = \frac{I_{\omega}}{\omega}.$$

Для симметричного двутаврового сечения имеем

$$I_{\omega} = \frac{t_f b_f^3 h^2}{24}; \quad \omega = \frac{b_f h}{4};$$

$$c_{\omega} = \frac{W_{\omega}}{W_{\omega}} = \frac{(|S_{\omega,сж}| + |S_{\omega,рас}|)}{I_{\omega}/\omega} = \frac{\frac{A_f b_f h}{4} \omega}{\frac{t_f b_f^3 h^2}{24}} = 1,5;$$

$$B = W_{\omega} \sigma = \frac{t_f b_f^2 h}{4} \sigma.$$

Таким образом, можно сделать вывод, что при действии бимоента в симметричном двутавровом сечении несущая способность в пластической стадии работы материала увеличивается в 1,5 раза. Так же, как и при изгибе, в центре сечения необходимо сохранить упругое ядро, поэтому для практических расчетов следует принять несколько меньшее ($c_{\omega} = 1,47$), чем теоретическое значение коэффициента.

Для несимметричного двутавра значение $B_{пл}$ определяется аналогично.

На рис. 4 показано распределение напряжений в полках несимметричного двутавра при действии пластического бимоента.

Равенство изгибающих моментов M_z в полках сохраняется, и следовательно, в пластическую стадию переходит сначала меньшая полка, в то время как в большей полке может сохраняться упругая зона работы материала.

Величина напряжений в большей полке зависит от размеров меньшей полки. В случае если $\frac{b_2^2 t_2}{b_1^2 t_1} < \frac{2}{3}$, то при исчерпаниии прочности большая полка будет находиться полностью в упругой стадии работы материала [3].

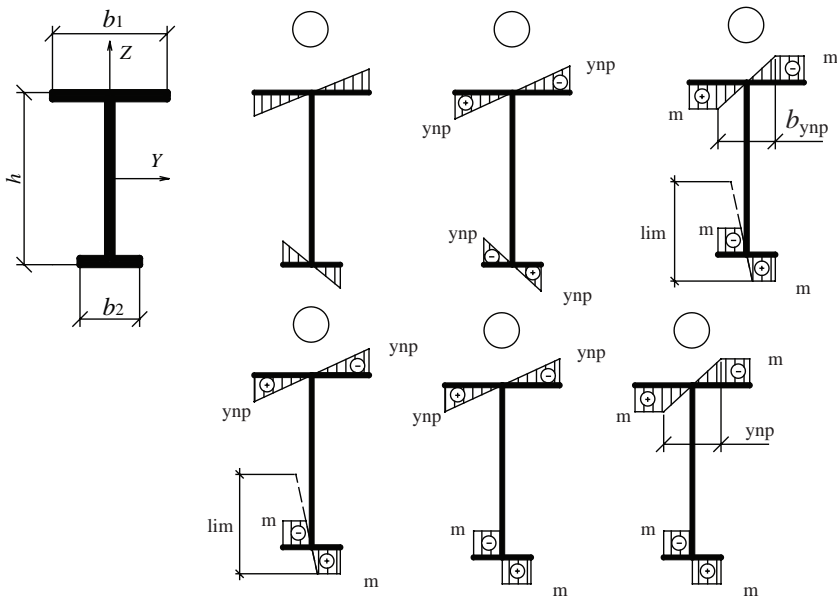


Рис. 4. Деформации и секториальные нормальные напряжения в несимметричном двутавровом сечении при стесненном кручении

В российской практике проектирования часто применяются двутавры с одинаковой толщиной полки $t_1 = t_2$. Можно отметить, что для таких сечений при одинаковой толщине полки и выполнении условия $b_2/b_1 < 0,816$ напряжения в большей полке при достижении предельного бимоента не будут превышать предела текучести.

Выражение для пластического бимоента можно получить, учитывая что напряжения по всей меньшей полке достигнут предела текучести. Тогда

$$B = W_{\omega,2} \sigma = \frac{t_f b_f^2 h}{4} \sigma .$$

С учетом того, что $B_{уп} = \frac{t_f b_2^2 h}{6} \sigma_t$, коэффициент для учета пластических деформаций равен $c_{\omega} = \frac{B_{уп}}{B} = 1,5$.

Для нормативного расчета несимметричного двутавра также следует принять значение коэффициента c_{ω} несколько меньше, чем теоретическое ($c_{\omega} = 1,47$), поскольку в меньшей полке сохраняется упругое ядро сечения.

Рекомендуемая для практического использования формула проверки несущей способности двутавровых профилей с учетом развития пластических деформаций при стесненном кручении имеет вид

$$\frac{B}{c_{\omega} W_{\omega} R_y \gamma_c} \leq 1, \text{ где } c_{\omega} = 1,47 .$$

Библиографический список

1. Власов В.3. Тонкостенные упругие стержни. М. : Физматгиз, 1959. 568 с.
2. Timoshenko S.P., Gere J.M. Theory of elastic stability, 2nd Ed. McGraw-Hill, New York, 1961, 541 p.

3. *Farwell Jr.C.R., Galambos T.V.* Nonuniform torsion of steel beams in elastic range. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 1969, vol. 95(12), pp. 2813—2829.
4. *Dinno K.S., Merchant W.* A procedure for calculating the plastic collapse of I-sections under bending and torsion. *The Structural Engineer*. 1965, vol. 43(7), pp. 219—221.
5. *Pi Y.L., Trahair N.S.* Inelastic torsion of steel I-beams. Research Report no. R679. The University of Sydney. 1993.
6. *Trahair N.S.* Plastic torsion analysis of monosymmetric and point-symmetric beams. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 1999, vol. 125, no. 2, pp. 175—182.
7. *Trahair N.S., Bradford M.A., Nethercot D.A., Gardner L.* The Behaviour and Design of Steel Structure to EC3. 4th Ed. New York, Taylor & Francis, 2008. 490 p.
8. *Соколовский В.В.* Теория пластичности. М. : Высш. шк., 1969. 608 с.
9. *Беленя Е.И.* Металлические конструкции. М. : Стройиздат, 1986. 560 с.
10. *Бычков Д.В.* Строительная механика стержневых тонкостенных конструкций. М. : Госстройиздат, 1962. 475 с.

Поступила в редакцию в ноябре 2013 г.

Об авторах: **Туснин Александр Романович** — доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой металлических конструкций, **Московский государственный строительный университет (ФГБОУ ВПО «МГСУ»)**, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, valeksol@mail.ru;

Прокич Милан — аспирант кафедры металлических конструкций, **Московский государственный строительный университет (ФГБОУ ВПО «МГСУ»)**, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, prokic@mail.ru.

Для цитирования: *Туснин А.Р., Прокич М.* Прочность двутавровых профилей при стесненном кручении с учетом развития пластических деформаций // Вестник МГСУ. 2014. № 1. С. 75—82.

A.R. Tusnin, M. Prokic

RESISTANCE OF I-BEAMS IN WARPING TORSION WITH ACCOUNT FOR THE DEVELOPMENT OF PLASTIC DEFORMATIONS

Torsion of thin-walled open-section beams due to restrained warping displacements of cross-section is causing additional stresses, which make a significant contribution to the total stress. Due to plastic deformation there are certain reserves of bearing capacity, identification of which is of significant practical interest. The existing normative documents for the design of steel structures in Russia do not include design factor taking into account the development of plastic deformation during warping torsion. The analysis of thin-walled open-section members with plastic deformation will more accurately determine their load-bearing capacity and requires further research. Reserves of the beams bearing capacity due to the development of plastic deformations are revealed when beams are influenced by bending, as well as tension and compression. The existing methodology of determining these reserves and the plastic shape factor in bending was reviewed. This has allowed understanding how it was possible to solve this problem for warping torsion members and outline possible ways of theoretical studies of the bearing capacity in warping torsion. The authors used theoretical approach in determining this factor for the symmetric I-section beam under the action of bimoment and gave recommendations for the design of torsion members including improved value of plastic shape factor.

Key words: warping torsion, resistance, plasticity, plastic shape factor, bimoment, plastic deformation.

References

1. Vlasov V.Z. *Tonkostennyye uprugie sterzhni* [Thin-walled Elastic Beams]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1959, 568 p.
2. Timoshenko S.P., Gere J.M. *Theory of Elastic Stability*. 2nd Ed. McGraw-Hill, New York, 1961, 541 p.
3. Farwell Jr.C.R., Galambos T.V. Nonuniform Torsion of Steel Beams in Elastic Range. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 1969, vol. 95(12), pp. 2813—2829.
4. Dinno K.S., Merchant W. A Procedure for Calculating the Plastic Collapse of I-sections under Bending and Torsion. *The Structural Engineer*. 1965, vol. 43(7), pp. 219—221.
5. Pi Y.L., Trahair N.S. *Inelastic Torsion of Steel I-beams*. Research Report no. R679. The University of Sydney, 1993.
6. Trahair N.S. Plastic Torsion Analysis of Monosymmetric and Point-symmetric Beams. *Journal of Structural Engineering*, ASCE. 1999, vol. 125, no. 2, pp. 175—182.
7. Trahair N.S., Bradford M.A., Nethercot D.A., Gardner L. *The Behaviour and Design of Steel Structure to EC3*. 4th Ed. Taylor & Francis, New York, 2008, 490 p.
8. Sokolovskiy V.V. *Teoriya plastichnosti* [Theory of Plasticity]. Moscow, Vysshaya Shkola Publ., 1969, 608 p.
9. Belenya E.I. *Metallicheskie konstruksii* [Metal Structures]. Moscow, Stroyizdat Publ., 1986, 560 p.
10. Bychkov D.V. *Stroitel'naya mekhanika sterzhnevyykh tonkostennykh konstruksiy* [Structural Mechanics of Bar Thin-walled Systems]. Moscow, Gosstroyizdat Publ., 1962, 475 p.

About the authors: **Tusnin Aleksandr Romanovich** — Doctor of Technical Sciences, Professor, Chair, Department of Metal Structures, **Moscow State University of Civil Engineering (MGSU)**, 26 Yaroslavskoe shosse, Moscow, 129337, Russian Federation; valeksol@mail.ru;

Prokic Milan — postgraduate student, Department of Metal Structures, **Moscow State University of Civil Engineering (MGSU)**, 26 Yaroslavskoe shosse, Moscow, 129337, Russian Federation; prokic@mail.ru.

For citation: Tusnin A.R., Prokic M. Prochnost' dvutavrovyykh profiley pri stesnennom kruchenii s uchetom razvitiya plasticheskikh deformatsiy [Resistance of I-beams in Warping Torsion with Account for the Development of Plastic Deformations] *Vestnik MGSU* [Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering]. 2014, no. 1, pp. 75—82.