

УДК 539.37

А.В. Мищенко

ФГБОУ ВПО «НГАСУ (Сибстрин)»

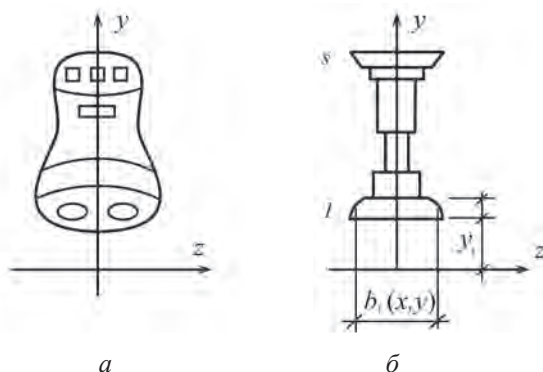
## РАСЧЕТНАЯ МОДЕЛЬ НЕЛИНЕЙНОГО ДИНАМИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ СОСТАВНЫХ МНОГОФАЗНЫХ СТЕРЖНЕЙ

Предложен способ формирования нелинейных физических соотношений для составных многофазных нелинейно-упругих стержней, основанный на аппроксимации диаграмм деформирования фазовых материалов разложениями по базисным функциям деформации. Показано использование в качестве них целых рациональных полиномов произвольной степени и жесткостных характеристик высших порядков.

**Ключевые слова:** многофазный стержень, слоистая структура, физическая нелинейность, базисные функции, жесткостные характеристики высших порядков.

Применение в конструктивных элементах неоднородных структур, рациональным образом адаптированных к напряженно-деформированному состоянию [1—6], позволяет создавать эффективные несущие конструкции, обладающие улучшенными свойствами, в плане повышения несущей способности и жесткости, снижения веса и стоимости. В статье для составных неоднородных стержней рассматривается решение начально-краевой задачи, основанное на предложенном способе формирования нелинейных физических соотношений.

Многофазный стержень (МФС) испытывает прямой продольно-поперечный динамический изгиб в плоскости симметрии  $xu$ , ось  $x$  имеет продольное направление с произвольной привязкой к стержню. Будем считать, что в стержне (рис.): обеспечены условия идеального межфазного контакта при отсутствии разрывов в деформациях на границах фаз; конструкционный материал каждой фазы представляет собой сплошную однородную изотропную вязкую нелинейно-упругую среду; однотипные физические характеристики фазовых материалов имеют одинаковые порядки; длина и характерный поперечный размер стержня удовлетворяют условию  $l \geq (5...6)h$ .



Поперечные сечения МФС со структурой общего вида (а), с поперечно-слоистой структурой (б)

При сформулированных ограничениях примем вариант кинематических соотношений и уравнений движения в форме

$$\varepsilon_x + 1 \approx 1, \quad \sin \theta \approx \theta, \quad \cos \theta \approx 1;$$

$$\varepsilon_x(x, y, t) = \varepsilon_0 - \kappa y, \quad \varepsilon_y(x, y, t) = 0, \quad \gamma_{yx}(x, y, t) = -\gamma_0(x, t) = v' - \theta, \quad (1)$$

$$\varepsilon_0(x, t) = u', \quad \kappa(x, t) = \theta'; \quad (2)$$

$$N' + (Q\theta)' = -q_x + m_A \ddot{u} - m_S \ddot{\theta}, \quad Q' - (N\theta)' = q_y - m_A \ddot{v}; \quad (3)$$

$$M' = Q + m_z + m_I \ddot{\theta} - m_S \ddot{u},$$

где  $(\cdot)' = \partial(\cdot)/\partial x$ ,  $(\dot{\cdot}) = \partial(\cdot)/\partial t$ ;  $\gamma_{yx}$ ,  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  — сдвиг, продольная и поперечная деформации;  $u$ ,  $v$  — продольное и поперечное перемещения точек отсчетной оси  $x$ ;  $\theta$  — угол поворота поперечного сечения;  $q_x(x, t)$ ,  $q_y(x, t)$ ,  $m_z(x, t)$  — динамические нагрузки;

$$[N, Q, M](x, t) = \sum_{k=1}^S \iint_{A_k} [\sigma_x^{(k)}, \tau_{yx}^{(k)}, -\sigma_x^{(k)} y] dA \quad (4)$$

продольная и поперечная силы, изгибающий момент;  $A_k$  — площадь поперечного сечения  $k$ -й фазы; инерционные силовые факторы представлены через обобщенные массовые характеристики МФС

$$[m_A, m_S, m_I](x) = \sum_{k=1}^S \rho_k \iint_{A_k} [1, y, y^2] dA.$$

Для материала  $k$ -й фазы через  $\alpha_k$ ,  $\eta_k$ ,  $\rho_k$  обозначим соответственно коэффициент температурного расширения, вязкость и объемную плотность.

Основой расчетной модели МФС является способ представления физических соотношений. Из трех компонент тензора напряжения при учете принятых допущений основной компонентой будем считать  $\sigma_x$ , а  $\tau_{yx}$ ,  $\sigma_y$  — второстепенными [7, 8]. Последней из них в данной задаче будем пренебрегать. Основную компоненту для материала  $k$ -й фазы представим в виде

$$\sigma_x^{(k)}(\varepsilon) = \sum_{i=0}^r p_{k,i}^{\sigma} f_{\varepsilon,i}(\varepsilon) + \eta_k \dot{\varepsilon}; \quad (5)$$

$$\varepsilon(x, y, t) = \varepsilon_0(x, t) - \kappa(x, t)y - \alpha_k T_k(x, y), \quad (6)$$

где  $f_{\varepsilon,i}$  ( $i = 0, 1, \dots, r$ ) — набор гладких базисных функций (БФ);

$p_{k,i}^{\sigma} = [p_{k,i}^{\sigma+}, p_{k,i}^{\sigma-}]$  — числовые физические параметры  $i$ -й аппроксимации для областей растяжения и сжатия в  $k$ -м материале;  $T_k(x, y)$  — функция изменения температуры в пространстве  $k$ -й фазы по отношению к исходному состоянию.

В зависимости от областей определения БФ могут носить глобальный или локальный характер. В первом случае все функции задаются на единой области допустимых деформаций  $\varepsilon \in \Pi_{\varepsilon}^{\Sigma}$ , либо на значительной качественно специфичной ее части, например, на положительных  $\Pi_{\varepsilon}^{+}$  и на отрицательных  $\Pi_{\varepsilon}^{-}$  деформациях. И, наоборот, при использовании локальных функций  $f_{\varepsilon,i}$ , интервалы их определения  $\varepsilon \in \Pi_{\varepsilon}^{(i)}$  не должны пересекаться. Это дает возможность математически точно описывать особенности законов деформирования

фазовых материалов, однако, в отличие от первого варианта БФ, приводит к необходимости отслеживания границ зон деформаций  $\Pi_{\epsilon}^{(i)}$  в пространстве МФС. Вариант применения локальных БФ аналогичен физической неоднородности (наведенной расчетным путем) с переменными в процессе деформирования границами.

Известно, что в теориях, основанных на введении кинематических гипотез, удовлетворение всех групп уравнений (в частности, физических соотношений для второстепенных компонент тензора напряжений) не представляется возможным [3, 8—12], поэтому касательные напряжения получим из условий равновесия сдвигаемой части элемента  $dx$  (без учета массовых сил)

$$\tau_{yx}^{(k)}(x, y, t) = -\frac{q_x}{b_k(x, y)} - \frac{1}{b_k(x, y)} \frac{\partial}{\partial x} \int_y^{y_{s+1}(x)} \sigma_x(x, y, t) b(x, y) dy. \quad (7)$$

Использование в (7) нелинейной аппроксимации (5) является трудоемкой процедурой и не целесообразно для второстепенных по энергетической значимости касательных напряжений. Рассматривая альтернативный подход, выполним аппроксимацию погонной сдвигающей силы в (7) в форме

$$\partial N^{\text{sec}}(x, y, t) / \partial x = b_0 \tau_0(x, t) f_{\tau}(y), \quad (8)$$

где  $f_{\tau}(y)$  — заданная безразмерная функция формы поперечного распределения сдвигающих сил, удовлетворяющая граничным условиям на поверхностях (при  $q_x = 0$  это  $f_{\tau}(y_1) = f_{\tau}(y_{s+1}) = 0$ );  $\tau_0(x, t)$  — функция, характеризующая продольное распределение сдвигающих сил;  $b_0$  — характерный размер МФС. В отличие от подходов, в которых выполняется аппроксимация деформаций сдвига [13] и аппроксимация касательных напряжений, в многослойных стержнях с разрывной функцией  $b(y)$  целесообразно выполнять аппроксимацию сдвигающей силы.

Объединив (4), (7), (8), получим формулу касательного напряжения в поперечно-слоистой структуре (см. рис., б)

$$\tau_{yx}^{(k)}(x, y, t) = \frac{Q(x, t)}{b_k(x, y)} \frac{f_{\tau}(y)}{F_{\tau}}, \quad F_{\tau} = \int_{y_1}^{y_{s+1}} f_{\tau} dy. \quad (9)$$

Формула (9) отражает второе интегральное равенство из (4) без учета особенностей функции  $\tau_{yx}(y)$  на межфазных границах. Если неоднородность проявляется и в направлении  $z$  (см. рис., а), то, используя условие постоянства сдвигов  $\gamma(z) = \text{const}$ , для напряжения получим

$$\tau_{yx}^{(k)}(x, y, z, t) = \frac{Q(x, t)}{b_z(x, y)} \frac{f_{\tau}(y)}{F_{\tau}} k_{\tau}, \quad k_{\tau} = \frac{G_k b_z(x, y)}{\sum_j G_j b_j(x, y)},$$

где  $b_j$  — ширина в направлении оси  $z$ ;  $G_j$  — модуль сдвига  $j$ -й фазы, пересекаемой линией  $y = \text{const}$ ;  $b_z = \sum b_j$  — суммарная ширина сечения в уровне  $y$ .

Для получения сдвиговой жесткости сечения представим касательные напряжения в  $k$ -м материале  $\tau_{yx}^{(k)} = G_k (1 - \omega_k) \gamma_{yx}$  с помощью функции Ильюшина  $\omega_k(\gamma_{yx})$ . Приравнявая  $Q \Delta \gamma_0$  — приращение энергии упругой де-

формации интегрального усилия  $Q$  и напряжений (9)  $\sum_{k=1}^s \iint_{A_k} \tau_{yx}^{(k)} \Delta \gamma_{yx} dA$  при достигнутом уровне деформаций сдвига, учитывая, что  $\Delta \gamma_0 = \Delta Q / D_Q(\gamma)$ ,  $\Delta \gamma_{yx} = \Delta \tau_{yx}^{(k)} / G_k / (1 - \omega_k)$ , получим переменную сдвиговую жесткость сечения

$$D_Q(x, \gamma) = F_\tau^2 \left/ \sum_{k=1}^s \int_{y_k}^{y_{k+1}} \frac{f_\tau^2}{b_k G_k (1 - \omega_k)} dy \right. \quad (10)$$

Аналогичный подход к вязким составляющим напряжения и интегрального усилия дает линейную осредненную сдвиговую вязкость сечения

$$V_Q(x) = F_\tau^2 \left/ \sum_{k=1}^s \int_{y_k}^{y_{k+1}} \frac{f_\tau^2}{b_k \eta_{\tau k}} dy \right., \quad (11)$$

где  $\eta_{\tau k}$  — сдвиговая вязкость  $k$ -го материала.

В результате соотношение вязкоупругости при сдвиге формулируется для интегральных величин в виде

$$\gamma_0 D_Q(\gamma_0) + \dot{\gamma}_0 V_Q = Q(x, t). \quad (12)$$

Влияние вязкости на напряжения (9) сказывается через поперечную силу (12) и характеристику (11).

Подстановка (5), (6) в (4) при учете (12) дает систему дифференциальных уравнений, связывающих обобщенные деформации, их скорости с интегральными силовыми факторами и температурой

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^s \sum_{i=0}^r p_{k,i}^\sigma \iint_{A_k} f_{\varepsilon,i} (\varepsilon_0 - \kappa y - \alpha_k T_k) dA + V_A \dot{\varepsilon}_0 - V_S \dot{\kappa} + N_{T\eta} = N; \\ - \sum_{k=1}^s \sum_{i=0}^r p_{k,i}^\sigma \iint_{A_k} f_{\varepsilon,i} (\varepsilon_0 - \kappa y - \alpha_k T_k) y dA - V_S \dot{\varepsilon}_0 + V_I \dot{\kappa} + M_{T\eta} = M; \\ \gamma_0 D_Q + \dot{\gamma}_0 V_Q = Q; \end{cases} \quad (13)$$

$$[V_A, V_S, V_I](x) = \sum_{k=1}^s \eta_k \iint_{A_k} [1, y, y^2] dA; \quad (14)$$

$$[N_{T\eta}, M_{T\eta}](x, \varepsilon) = \sum_{k=1}^s \alpha_k \eta_k \sum_{i=0}^r \iint_{A_k} [-1, y] T_k dA. \quad (15)$$

Квазилинейный аналог системы уравнений (13) имеет вид

$$\begin{cases} \bar{D}_A \varepsilon_0 - \bar{D}_S \kappa + V_A \dot{\varepsilon}_0 - V_S \dot{\kappa} = N - N_T - N_{T\eta}; \\ -\bar{D}_S \varepsilon_0 - \bar{D}_I \kappa - V_S \dot{\varepsilon}_0 + V_I \dot{\kappa} = M - M_T - M_{T\eta}; \\ \gamma_0 D_Q + \dot{\gamma}_0 V_Q = Q; \end{cases} \quad (16)$$

$$[\bar{D}_A, \bar{D}_S, \bar{D}_I](x, \varepsilon) = \sum_{k=1}^s \sum_{i=0}^r p_{k,i}^\sigma \iint_{A_k} [1, y, y^2] \frac{f_{\varepsilon i}(\varepsilon)}{\varepsilon_0 - \kappa y - \alpha_k T_k} dA; \quad (17)$$

$$[N_T, M_T](x, \varepsilon) = \sum_{k=1}^s \alpha_k \sum_{i=0}^r p_{k,i}^{\sigma} \iint_{A_k} [-1, y] \frac{f_{\varepsilon i}(\varepsilon) T_k}{\varepsilon_0 - \kappa y - \alpha_k T_k} dA, \quad (18)$$

где для сечения МФС использованы: (17) — переменные секущие жесткостные характеристики при нелинейном термоупругом деформировании; (14) — вязкостные характеристики; (18) — силовые факторы, обусловленные стесненностью продольных температурных деформаций; (15) — силовые факторы температурно-вязкого деформирования, обращающиеся в нуль при стационарном температурном воздействии;  $\varepsilon$  — деформация (6).

Объединяя физические соотношения (16), уравнения движения (3), уравнения кинематических связей (1), (2) получим замкнутую систему соотношений для решения нелинейной начально-краевой задачи динамического деформирования МФС. Для определения постоянных записываются шесть граничных условий из набора

$$\begin{aligned} R_{1,2}^{(x)} [N(x_*, t), Q(x_*, t), u(x_*, t), v(x_*, t), \theta(x_*, t)] &= 0; \\ R_{3,4}^{(y)} [N(x_*, t), Q(x_*, t), u(x_*, t), v(x_*, t), \theta(x_*, t)] &= 0; \\ R_{5,6} [M(x_*, t), \theta(x_*, t)] &= 0, \quad x_* = 0; l \end{aligned} \quad (19)$$

и четыре начальных условия

$$R_{7,8} [Z(x, 0)] = 0, \quad R_{9,10} [\dot{Z}(x, 0)] = 0, \quad Z \in [u, v].$$

При статическом воздействии (3), (16) становятся обыкновенными дифференциальными уравнениями и могут быть разрешены относительно искомого кинематических  $u$ ,  $\theta$ ,  $v$  и силовых  $N$ ,  $Q$ ,  $M$  функций с сохранением нелинейных членов в правых частях. Для замыкания краевой задачи используются граничные условия (19).

Хорошие результаты в плане получения структурированных физических соотношений, формируемых на основе установленных правил, дает использование однопольных степенных БФ  $f_{\varepsilon,i} = \varepsilon^i$  с натуральными показателями, подстановка которых в (5) дает

$$\sigma_x^{(k)}(\varepsilon, t) = \sum_{i=0}^r p_{k,i}^{\sigma} \varepsilon^i + \eta_k \dot{\varepsilon}. \quad (20)$$

Преимущества этих функций состоит в том, что первые три из них с номерами  $i = 0, 1, 2, \dots$  традиционно используются в различных теориях и имеют определенный физический смысл. Следующие — позволяют уточнить аппроксимации диаграмм фазовых материалов и результаты расчета конструкции.

Особенно эффективным становится использование аппроксимации (20) при силовом воздействии ( $T = 0$ ). В этом случае первое и второе уравнения системы (13) принимают вид

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^i c_{ij} D_{ij} \varepsilon_0^{i-j} \kappa^j + V_A \dot{\varepsilon}_0 - V_S \dot{\kappa} = N(x, t); \\ \sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^i c_{ij} D_{ij+1} \varepsilon_0^{i-j} \kappa^j - V_S \dot{\varepsilon}_0 + V_I \dot{\kappa} = M(x, t) \end{cases} \quad (21)$$

с жесткостными характеристиками сечения из нелинейно-упругих материалов  $i$ -го физического и  $j$ -го геометрического порядков

$$D_{ij}(x) = \sum_{k=1}^s p_{k,i}^{\sigma} \iint_{A_k} y^j dA = \sum_{k=1}^s D_{ij}^{(k)}, \quad (22)$$

$c_{ij}$  ( $j=0, \dots, i$ ) — коэффициенты биномов Ньютона  $(\varepsilon_0 - \kappa)^i$ . В случае пересечения  $k$ -й фазы нейтральной осью следует в (22) применить разбивку

$$D_{ij}^{(k)}(x) = p_{k,i}^{\sigma+} \iint_{A_k^+} y^j dA + p_{k,i}^{\sigma-} \iint_{A_k^-} y^j dA.$$

В ряду геометрических характеристик  $I_j = \iint_{A_k} y^j dA$  ( $j=0, 1, 2, \dots$ ) первые

три величины — это общеизвестные площадь, статический момент и момент инерции  $k$ -й фазы. Физический порядок  $i$  образуется формальным использованием  $i$ -го коэффициента  $p_{k,i}^{\sigma}$  аппроксимации (20).

Система уравнений (21) является обобщением частных случаев, среди которых: жесткопластическое деформирование с учетом разносопротивляемости ( $r=0, \eta=0$ ); линейное разномодульное деформирование ( $r=1, p_{k,0}^{\sigma}=0, p_{k,1}^{\sigma}=E_k^{\pm}$ ); удержание линейного и квадратичного членов дает степенную зависимость Герстнера  $\sigma = E\varepsilon + p\varepsilon^2$ , обобщенную на случай разносопротивляемости материалов [14, 15].

Набор однородных блоков ( $i=1, \dots, r$ ) в (20), (21) для различных материалов может быть произвольным. Например, в железобетонном стержне возможны следующие варианты (первая фаза — бетон, вторая — арматура):

А. Жестко-пластический бетон и линейно-упругая арматура характеризуются зависимостями (20):  $\sigma_x^{(1)} = \pm \sigma_{1s}^{\pm}$ ,  $\sigma_x^{(2)} = E_2 \varepsilon$ . Блоки жесткостных характеристик (22):  $D_{00}^{(1)} = \sigma_{1s}^+ I_{01}^+ - \sigma_{1s}^- I_{01}^-$ ,  $D_{01}^{(1)} = \sigma_{1s}^+ I_{11}^+ - \sigma_{1s}^- I_{11}^-$ ,  $D_{10}^{(2)} = E_2 I_{02}$ ,  $D_{11}^{(2)} = E_2 I_{12}$ ,  $D_{12}^{(2)} = E_2 I_{22}$ .

Б. Для бетона, деформирующегося по уточненной квадратичной зависимости, напряжение:  $\sigma_x^{(1)} = E_1^{\pm} \varepsilon + p_{1,2}^{\pm} \varepsilon^2$ . Блоки (22):  $D_{10}^{(1)} = E_1^+ I_{01}^+ + E_1^- I_{01}^-$ ,  $D_{11}^{(1)} = E_1^+ I_{11}^+ + E_1^- I_{11}^-$ ,  $D_{12}^{(1)} = E_1^+ I_{21}^+ + E_1^- I_{21}^-$ ,  $D_{20}^{(1)} = p_{1,2}^+ I_{01}^+ + p_{1,2}^- I_{01}^-$ ,  $D_{21}^{(1)} = p_{1,2}^+ I_{11}^+ + p_{1,2}^- I_{11}^-$ ,  $D_{22}^{(1)} = p_{1,2}^+ I_{21}^+ + p_{1,2}^- I_{21}^-$ ,  $D_{23}^{(1)} = p_{1,2}^+ I_{31}^+ + p_{1,2}^- I_{31}^-$ . Суммируя, согласно (22) одноименные блоки жесткостных характеристик, для двух вариантов имеем уравнения (21)

$$\left\{ \begin{array}{l} +D_{00} + D_{10}\varepsilon_0 - D_{11}\kappa = N; \\ -D_{01} - D_{11}\varepsilon_0 + D_{12}\kappa = M; \\ \underbrace{\quad}_0 \quad \underbrace{\quad}_1 \end{array} \right\}; \left\{ \begin{array}{l} +D_{10}\varepsilon_0 - D_{11}\kappa + D_{20}\varepsilon_0^2 - 2D_{21}\varepsilon_0\kappa + D_{22}\kappa^2 = N; \\ -D_{11}\varepsilon_0 + D_{12}\kappa - D_{21}\varepsilon_0^2 + 2D_{22}\varepsilon_0\kappa - D_{23}\kappa^2 = M. \\ \underbrace{\quad}_1 \quad \underbrace{\quad}_2 \end{array} \right.$$

**Выводы.** Предложенный способ записи исходных физических соотношений характеризуется относительной простотой и эффективностью при формировании нелинейных физических систем уравнений для неоднородных стерж-

ней. Посредством записи преобразованных линеаризованных уравнений (16) реализуется возможность использования стандартных процедур получения матриц податливости и жесткости неоднородных стержней и стержневых систем. Малая трудоемкость способа ценна при решении обратных задач рационального проектирования.

### Библиографический список

1. Андреев В.И., Потехин И.А. О способе создания оптимальных конструкций на основе решения обратных задач теории упругости неоднородных тел // Вестник отделения строительных наук. 2007. № 11. С. 48—52.
2. Andreev V.I. Optimization of thick-walled shells based on solutions of inverse problems of the elastic theory for inhomogeneous bodies // Computer Aided Optimum Design in Engineering. 2012. Pp. 189—202.
3. Альтенбах Х. Основные направления теории многослойных тонкостенных конструкций // Механика композитных материалов. 1998. Т. 34. № 3. С. 333—348.
4. Тетерс Г.А., Крезгерс А.Ф. Многоцелевое оптимальное проектирование композитных конструкций. Обзор // Механика композитных материалов. 1996. Т. 32. № 3. С. 363—376.
5. Мищенко А.В., Немировский Ю.В. Оптимизация слоистых стержней при варьировании геометрических функций наружных и внутренних слоев // Известия вузов. Строительство. 2005. № 3. С. 19—24.
6. Мищенко А.В. Применение сжато-изогнутых стержней со смещенными центрами сечений в рамных конструкциях // Известия вузов. Строительство. 2007. № 6. С. 4—11.
7. Васильев В.В. Классическая теория пластин — история и современный анализ // Известия РАН. Механика твердого тела. 1998. № 3. С. 45—58.
8. Пискунов В.Г. Итерационная аналитическая теория в механике слоистых композитных систем // Механика композитных материалов. 2003. Т. 39. № 1. С. 3—24.
9. Baxter S.C., Horgan C.O. End effects for anti-plane shear deformations of sandwich structures // Journal of Elasticity. 1995. Vol. 40. No. 2. Pp. 123—164.
10. Cowper G.R. The shear coefficient in Timoshenko's beam theory // Trans. of ASME. 1966. Vol. E88. No. 2. Pp. 335—340.
11. Foraboschi P. Analytical Solution of Two-Layer Beam Taking into Account Nonlinear Interlayer Slip // J. Eng. Mech. 2009. Vol. 135. No. 10. Pp. 1129—1147.
12. Karata M., Afaq K.S., Mistou S. Mechanical behaviour of laminated composite beam by new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity // International Journal of Solids and Structures. 2003. Vol. 40. No. 6. Pp. 1525—1546.
13. Амбарцумян С.А. Еще одна уточненная теория анизотропных оболочек // Механика полимеров. 1970. № 5. С. 884—896.
14. Немировский Ю.В. Расчет и рациональное проектирование деревянных стержневых элементов // Современные проблемы совершенствования и развития металлических, деревянных, пластмассовых конструкций в строительстве и на транспорте : сб. научных трудов III Междунар. науч.-техн. конф. Самара : СамГАСУ, 2005. С. 247—251.
15. Мищенко А.В., Немировский Ю.В. Расчет и проектирование деревянных стержневых систем с учетом физической нелинейности // Строительная механика и расчет сооружений. 2007. № 6. С. 46—52.

Поступила в редакцию в апреле 2014 г.

Об авторе: **Мищенко Андрей Викторович** — кандидат технических наук, доцент кафедры строительной механики, **Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет (Сибстрин) (ФГБОУ ВПО «НГАСУ» (Сибстрин))**, 630008, г. Новосибирск, ул. Ленинградская, д. 113, (8383) 266-33-80, mavr@hnet.ru.

Для цитирования: *Мищенко А.В.* Расчетная модель нелинейного динамического деформирования составных многофазных стержней // Вестник МГСУ. 2014. № 5. С. 35—43.

**A.V. Mishchenko**

### **CALCULATION MODEL OF NON-LINEAR DYNAMIC DEFORMATION OF COMPOSITE MULTIPHASE RODS**

The method of formulating non-linear physical equations for multiphase rods is suggested in the article. Composite multiphase rods possess various structures, include shear, polar, radial and axial inhomogeneity. The Timoshenko's hypothesis with the large rotation angles is used.

The method is based on the approximation of longitudinal normal stress low by basic functions expansions regarding the linear viscosity low. The shear stresses are calculated with the equilibrium equation using the subsidiary function of the longitudinal shift force.

The system of differential equations connecting the internal forces and temperature with abstract deformations are offered by the basic functions. The application of power functions with arbitrary index allows presenting the compact form equations. The functional coefficients in this system are the highest order rigidity characteristics. The whole multiphase cross-section rigidity characteristics are offered the sums of the rigidity characteristics of the same phases individually. The obtained system allows formulating the well-known particular cases. Among them: hard plasticity and linear elastic deformation, different module deformation and quadratic Gerstner's low elastic deformation.

The reform of differential equations system to the quasilinear is suggested. This system contains the secant variable rigidity characteristics depending on abstract deformations.

This system includes the sum of the same uniform blocks of different order. The rods phases defined the various set of uniform blocks phase materials.

The integration of dynamic, kinematic and physical equations taking into account initial and edge condition defines the full dynamical multiphase rods problem.

The quasilinear physical equations allow getting the variable flexibility matrix of multiphase rod and rods system.

**Key words:** multiphase rod, layered structure, physical non-linearity, basic functions, higher order rigidity characteristics.

#### **Reference**

1. Andreev V.I., Potekhin I.A. O sposobe sozdaniya optimal'nykh konstruktсий na osnove resheniya obratnykh zadach teorii uprugosti neodnorodnykh tel [On the Method of Creating Optimal Structures Based on Solving Inverse Problems of Inhomogeneous Bodies Elasticity Theory]. *Vestnik otdeleniya stroitel'nykh nauk* [Bulletin of Civil Engineering Scientific Department]. 2007, no. 11, pp. 48—52.
2. Andreev V.I. Optimization of Thick-walled Shells Based on Solutions of Inverse Problems of the Elastic Theory for Inhomogeneous Bodies. *Computer Aided Optimum Design in Engineering*. 2012, pp. 189—202. DOI: 10.2495/OP120171.
3. Al'tenbakh Kh. Osnovnye napravleniya teorii mnogosloynnykh tonkostennykh konstruktсий [Main Directions of Multi Layered Thin-walled Structures Theory]. *Mekhanika kompozitnykh materialov* [Mechanics of Composite Materials]. 1998, vol. 34, no. 3, pp. 333—348.



4. Teters G.A., Kregers A.F. *Mnogotselevoe optimal'noe proektirovanie kompozitnykh konstruksiy. Obzor* [Multi-purpose Optimal Design of Composite Structures. Review]. *Mekhanika kompozitnykh materialov* [Mechanics of Composite Materials]. 1996, vol. 32, no. 3, pp. 363—376.
5. Mishchenko A.V., Nemirovskiy Yu.V. *Optimizatsiya sloistyykh sterzhney pri var'irovanii geometricheskikh funktsiy naruzhnykh i vnutrennykh sloev* [Optimization of Layered Rods by Means of Geometrical Functions Variation of External and Internal Layers]. *Izvestiya vuzov. Stroitel'stvo* [News of Higher Educational Institutions. Construction]. 2005, no. 3, pp. 19—24.
6. Mishchenko A.V. *Primenenie szhato-izognutykh sterzhney so smeshchennymi tsen-trami secheniy v ramnykh konstruksiyakh* [Using Compressed-Bending Bars with Displaced Cross Section Centers in Frame Structures]. *Izvestiya vuzov. Stroitel'stvo* [News of Higher Educational Institutions. Construction]. 2007, no. 6, pp. 4—11.
7. Vasil'ev V.V. *Klassicheskaya teoriya plastin — istoriya i sovremennyy analiz* [Classical Plates Theory — History and Contemporary Analysis]. *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela* [Journal of Russian Academy of Sciences. Mechanics of Solids]. 1998, no. 3, pp. 45—58.
8. Piskunov V.G. *Iteratsionnaya analiticheskaya teoriya v mekhanike sloistyykh kompozitnykh sistem* [Iterative Analytical Theory in the Mechanics of Layered Composite Systems]. *Mekhanika kompozitnykh materialov* [Mechanics of Composite Materials]. 2003, vol. 39, no. 1, pp. 3—24.
9. Baxter S.C., Horgan C.O. *End Effects for Anti-plane Shear Deformations of Sandwich Structures*. *Journal of Elasticity*. 1995, vol. 40, no. 2, pp. 123—164. DOI: 10.1007/BF00042458.
10. Cowper G.R. *The Shear Coefficient in Timoshenko's Beam Theory*. *Trans. of ASME*. 1966, vol. E88, no. 2, pp. 335—340. DOI: 10.1115/1.3625046.
11. Foraboschi P. *Analytical Solution of Two-Layer Beam Taking into Account Nonlinear Interlayer Slip*. *J. Eng. Mech.* 2009, vol. 135, no. 10, pp. 1129—1147. DOI: 10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0000043.
12. Karama M., Afaq K.S., Mistou S. *Mechanical Behaviour of Laminated Composite Beam by New Multi-layered Laminated Composite Structures Model with Transverse Shear Stress Continuity*. *International Journal of Solids and Structures*. 2003, vol. 40, no. 6, pp. 1525—1546.
13. Ambarsumian S.A. *Eshche odna utochnennaya teoriya anizotropnykh obolochek* [Another Refined Theory of Anisotropic Shells]. *Mekhanika polimerov* [Mechanics of Polymers]. 1970, no. 5, pp. 884—896.
14. Nemirovskiy Yu.V. *Raschet i ratsional'noe proektirovanie derevyannykh sterzhnevyykh elementov* [Calculation and Rational Design of Wood Rods]. *Sovremennye problemy sovershenstvovaniya i razvitiya metallicheskih, derevyannykh, plastmassovykh konstruksiy v stroitel'stve i na transporte: sbornik nauchnykh trudov III Mezhdunarodnoy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii* [Contemporary Problems of Improving and Development of Steel, Wood and Plastic Structures in Construction and Transport: Collection of Scientific Works of the 3rd International Scientific and Technical Conference]. Samara, SamGASU Publ., 2005, pp. 247—251.
15. Mishchenko A.V., Nemirovskiy Yu.V. *Raschet i proektirovanie derevyannykh sterzhnevyykh sistem s uchetom fizicheskoy nelineynosti* [Analysis and Rational Designing of Wood Rod Systems with Regard for Physical Nonlinearity]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy* [Structural Mechanics and Analysis of Building]. 2007, no. 6, pp. 46—52.

About the author: **Mishchenko Andrey Viktorovich** — Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Structural Mechanics, **Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering (Sibstrin) (NGASU)**, 113 Leningradskaya str., Novosibirsk, 630008, Russian Federation; mavr@hnet.ru.

For citation: Mishchenko A.V. *Raschetnaya model' nelineynogo dinamicheskogo deformirovaniya sostavnykh mnogofaznykh sterzhney* [Calculation Model of Non-linear Dynamic Deformation of Composite Multiphase Rods]. *Vestnik MGSU* [Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering]. 2014, no. 5, pp. 35—43.