ИНФОРМАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ И ЛОГИСТИКА В СТРОИТЕЛЬСТВЕ

УДК 519.248

Д.П. Ануфриев, А.Ю. Холодов

ГАОУ АО ВПО «АИСИ»

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ИМИТАЦИОННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ МОДЕЛИ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С НАКОПИТЕЛЕМ И ИНТЕРВАЛЬНОЙ ЗАДЕРЖКОЙ НАЧАЛА ОБСЛУЖИВАНИЯ

Приведены результаты имитационных экспериментов и их статистический анализ, проведенный с целью установления зависимостей параметров системы массового обслуживания с бункером-накопителем и интервальной задержкой начала обслуживания на основе выполнения условия тождественности типов входящего и выходящего потоков заявок. На основании математических ожиданий входящего потока и обслуживающего устройства определена методика расчета максимально возможного интервала начала обслуживания системы и выходящего потока заявок применительно к экспоненциальному типу распределения. В процессе исследования также были разработаны методики получения параметров статистической нулевой гипотезы с использованием аппроксимационных подходов, основанные на методе наименьших квадратов и интегральном методе.

Ключевые слова: массовое обслуживание, нулевая гипотеза, экспоненциальный закон, распределение временных интервалов, аппроксимационные подходы, критерии согласия, параметрические гипотезы.

Система массового обслуживания (СМО) с накопителем и интервальной задержкой начала обслуживания была введена в рассмотрение в [1]. Была разработана дискретно-событийная имитационная модель функционирования определенной СМО и установлена ее адекватность как следствие выполнения критерия Фишмана — Кивиа. Данная работа посвящена статистическому анализу оценки функциональных характеристик выходящего потока с целью перехода к анализу многофазной, последовательно соединенной сети массового обслуживания (СеМО), где в качестве фазы будет рассматриваться определенная СМО. В работе рассматриваются статистические методы использования критериев согласия при проверке параметрических гипотез.

Постановка задачи

При определении «правил» функционирования СМО в [1] рассматривалась система G/G , т.е. функции распределения интервалов поступления заявок в систему и времени обслуживания были произвольными. Но поскольку целью исследований является анализ функционирования многофазной последовательной сети, необходимо наложить ограничения на СМО, связанные с идентичностью типов распределения входящего потока и времени обслуживания. В связи с этим будем рассматривать СМО как систему M/M , т.е. с простейшим

входящим потоком и экспоненциальным законом распределения времени обслуживания. В этой связи также необходимо отметить, что выбор экспоненциального закона распределения оправдан с практической точки зрения, так как рассматриваемая система моделирует функционирование фазы бизнес-процесса долевого участия в строительстве жилья [2—4], где статистические данные прихода дольщиков подчиняются распределению Вейбулла, а экспоненциальное распределение является его частным случаем [5, 6].

Кроме того, была сформирована ситуационная таблица на основании зависимостей между пятью основными параметрами СМО (N , τ_1 , τ_2 , a , b), где N — вместимость бункера-накопителя; τ_1 — модельное время, начиная с которого заявки поступают на обслуживание; $\tau_1 + \tau_2$ — модельное время, начиная с которого заявки прекращают поступать в бункер-накопитель; a и b — среднее время, соответственно, входящего потока и обслуживания [7].

Определено, что при выполнении условий

$$\left\lfloor \frac{\frac{1}{a}b - a}{a - b} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2}{a} \right\rfloor < N, \quad a > b \quad (1)$$

для определения функциональных зависимостей выходящего потока, необходимо использовать математический аппарат статистического анализа.

Также необходимо отметить, что посредством программных средств имитационной модели формируется массив значений модельного времени для каждой заявки выходящего потока, который, несомненно, может быть использован для формирования генеральной совокупности исследуемой случайной величины [8].

Методы исследования

В начале данного раздела сформируем алгоритм методики статистического анализа:

1. формирование интервального статистического ряда;
2. определение параметров статистической нулевой гипотезы;
3. использование критерия согласия χ^2 для оценки выдвинутой статистической нулевой гипотезы.

Формирование интервального статистического ряда. Пусть $X_{im} = \{x_{im_i}\}$, $i = 1, 2, \dots, L + 1$ — массив значений модельного времени для выходящего потока, тогда $X = \{x_j = x_{im_{j+1}} - x_{im_j}\}$, $j = 1, 2, \dots, L$ — массив интервальных значений модельного времени для выходящего потока. Определяем $x_{<1>} = \min_j(X)$ и $x_{<L>} = \max_j(X)$. Определяем число отрезков $m = \lceil k \rceil$ разбиения отрезка $[x_{<1>}, x_{<L>}]$, где $k = \log_2 n + 1$.

Для каждого отрезка $\Delta_i \triangleq \left[x_{<1>} + \frac{x_{<L>} - x_{<1>}}{m}(i - 1), x_{<1>} + \frac{x_{<L>} - x_{<1>}}{m}i \right]$, $i = 1, 2, \dots, m$ определяем число элементов выборки «попадающих» в него L_i , $i = 1, 2, \dots, m$, причем $\sum_i L_i = L$ и фактические координаты середины каждого отрезка — $\tilde{x}_i$. Таким образом, получаем табличную функцию, являющуюся интервальным статистическим рядом:

L_1	L_2	$\dots$	L_m
$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\dots$	$\tilde{x}_m$

Используя интервальный статистический ряд, определяем функцию эмпирической плотности распределения $p_L(x)$:

$$p_i(x) = \begin{cases} \frac{L_i}{L|\Delta_i|}, & x \in \Delta_i; \\ 0, & x \notin \bigcup_i \Delta_i. \end{cases} \quad (2)$$

Также возможно представление функции эмпирической плотности распределения в табличном виде с использованием срединных точек каждого отрезка $\tilde{x}_i$:

p_1	p_2	$\dots$	p_m
$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\dots$	$\tilde{x}_m$

Кроме того, в общем случае $\sum_i p_i \neq 1$.

Определение параметров статистической нулевой гипотезы. Необходимо установить методы определения параметра λ_0 для последующего формирования статистической нулевой гипотезы и анализа посредством критерия согласия.

I. Использование среднего значения статистического ряда. Параметр λ_0 определяется как обратная величина среднего значения статистического ряда, т.е.

$$\lambda_0 = \frac{L}{\sum_i x_i}. \quad (3)$$

II. Использование среднего значения интервального статистического ряда. Параметр λ_0 определяется как обратная величина среднего значения интервального статистического ряда, т.е.

$$\lambda_0 = \frac{1}{\sum_i \hat{p}_i \tilde{x}_i}, \quad (4)$$

где $\hat{p}_i = \frac{L_i}{L}$ — относительная частота события X .

III. Использование аппроксимационного метода наименьших квадратов. Суть метода состоит в аппроксимации таблично заданной эмпирической плотности распределения функцией $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ с использованием метода наименьших квадратов. С целью обоснованности использования данного метода была сгенерирована статистическая выборка, определена эмпирическая плотность распределения и, соответственно, узловые значения и представлены на одном графике с теоретической функцией плотности распределения (рис. 1).

Согласно методу, определяется условие минимизации

$$\min(G(\lambda)) = \min \left(\sum_i \left[\left(p_i - \lambda e^{-\lambda \tilde{x}_i} \right)^2 \right] \right) \quad (5)$$

и реализуется алгоритм поиска точек экстремума функции $G(\lambda)$ относительно переменной λ .

Рис. 1. Графическое представление узловых точек (×) и теоретической функции (—), с помощью параметров которой была сформирована эмпирическая плотность распределения случайной величины

Приравниваем к нулю производную $G(\lambda)$:

$$2 \sum_i \left[(p_i - \lambda e^{-\lambda \tilde{x}_i}) \right] \sum_i \left[(\lambda^2 e^{-\lambda \tilde{x}_i} - e^{-\lambda \tilde{x}_i}) \right] = 0;$$

$$\left(\sum_i \left[(p_i - \lambda e^{-\lambda \tilde{x}_i}) \right] \right) \left(\sum_i \left[e^{-\lambda \tilde{x}_i} \right] \right) (\lambda^2 - 1) = 0. \quad (6)$$

Отсюда получаем объединение

$$\begin{cases} (\lambda^2 - 1) = 0; \\ \sum_i \left[(p_i - \lambda e^{-\lambda \tilde{x}_i}) \right] = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Очевидно, что необходимо переходить к рассмотрению последнего уравнения объединения:

$$\sum_i p_i = \lambda \sum_i e^{-\lambda \tilde{x}_i}. \quad (8)$$

Логарифмируя обе части уравнения (8), получаем:

$$\ln \left(\sum_i p_i \right) = \ln(\lambda) + \ln \left(\sum_i e^{-\lambda \tilde{x}_i} \right), \quad (9)$$

принимая во внимание, что

$$\sum_i e^{-\lambda \tilde{x}_i} = e^{-\lambda \tilde{x}_i} (1 + e^{-\lambda h} + e^{-2\lambda h} + \dots + e^{-\lambda(n-1)h}), \quad (10)$$

где h — длина интервала интервального статистического ряда и разложение функции e^{-x} в ряд Маклорена:

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \dots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!};$$

$$\sum_i e^{-\lambda \tilde{x}_i} = e^{-\lambda \tilde{x}_1} \frac{e^{\lambda h} - e^{\lambda h(1-k)}}{e^{\lambda h} - 1}. \quad (11)$$

Получаем итоговое уравнение

$$\ln\left(\sum_i p_i\right) = \ln(\lambda) + \ln\left(e^{-\lambda \tilde{x}_1} \frac{e^{\lambda h} - e^{\lambda h(1-k)}}{e^{\lambda h} - 1}\right);$$

$$\ln\left(\sum_i p_i\right) = \ln(\lambda) - \lambda \tilde{x}_1 + \ln(e^{\lambda h} - e^{\lambda h(1-k)}) - \ln(e^{\lambda h} - 1). \quad (12)$$

Рассмотрим функцию трех аргументов:

$$f(\lambda, h, k) = \ln(e^{\lambda h} - e^{\lambda h(1-k)}) - \ln(e^{\lambda h} - 1). \quad (13)$$

Посредством замены $t = \lambda h$ переходим к функции двух переменных

$$f(t, k) = \ln(e^t - e^{t(1-k)}) - \ln(e^t - 1). \quad (14)$$

Для параметра k можно задать вполне определенные базовые границы области определения, в частности, при объеме выборки $L = 100 - k = 8$, при $L = 1000 - k = 11$. Кроме того, между изменениями значений λ и h , при фиксированном k , наблюдается обратная связь, выражающаяся в том, что при увеличении λ происходит уменьшение h , и наоборот, при уменьшении λ значение h увеличивается. Учитывая все вышеизложенное и используя разложение в ряд Тейлора:

$$\ln(1+x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1} x^i}{i}, \quad -1 < x \leq 1. \quad (15)$$

Была получена численная оценка функции $f(t, n)$ для использования в уравнении (12) для определения параметра λ_0 (рис. 2).

Рис. 2. График функции $f(t, 11) = \ln(e^t - e^{t(-10)}) - \ln(e^t - 1)$

Для сгенерированных в Mathcad посредством $\text{gehr}(1000, 1)$ и $\text{gehr}(1000, 2)$ статистических выборок на рис. 3 приведены графические реализации функции

$$F(\lambda) = -\ln\left(\sum_i p_i\right) + \ln(\lambda) - \lambda\tilde{x}_1 + \ln\left(1 + \frac{\sqrt{e}}{2}\right). \quad (16)$$

Рис. 3. Графики функции $F(\lambda) = -\ln\left(\sum_i p_i\right) + \ln(\lambda) - \lambda\tilde{x}_1 + \ln\left(1 + \frac{\sqrt{e}}{2}\right)$ при выборках: a — $\text{gehr}(1000, 1)$; b — $\text{gehr}(1000, 2)$

Таким образом, параметр статистической гипотезы λ_0 определяется как аргумент, при котором функция (16) обращается в ноль ($F(\lambda_0) = 0$).

IV. Использование аппроксимационного «интегрального» метода. Определенный интеграл функции плотности распределения определяет вероятность принять значение случайной величины в интервале, ограниченном нижним и верхним пределами интегрирования. Предлагается аппроксимационный метод, суть которого, аналогично методу наименьших квадратов, заключается в минимизации квадрата разности интегральных сумм на всем аппроксимационном отрезке. Но так как интегральная сумма эмпирической плотности распределения случайной величины равна единице, то данный метод предлагается модифицировать — использовать его на частичной интегральной сумме

$$\min(Q(\lambda)) = \min\left(\left[\sum_{i=2}^{k-1} (p_i h) - e^{-\lambda x_2} + e^{-\lambda x_{k-1}}\right]^2\right), \quad (17)$$

где $x_2 = \tilde{x}_2 - h/2$ и $x_{k-1} = \tilde{x}_{k-1} + h/2$.

Очевидно, что существует достаточно много вариантов формирования частичной интегральной суммы эмпирической плотности распределения (ЭПР), но в данной работе используется методика выведения из рассмотрения крайних — левого и правого отрезков длины h области определения функции ЭПР (рис. 4).

Рис. 4. График эмпирической плотности распределения выборки: *a* — $\text{гехр}(1000, 1)$; *б* — изменение области определения

Последующие действия согласовываются с операциями над функционалом в предыдущем методе: взятие производной $Q(\lambda)$ и приравнивание ее к нулю, получение объединения уравнений и переход к основному уравнению:

$$\sum_{i=2}^{k-1} (p_i h) - e^{-\lambda x_2} + e^{-\lambda x_{k-1}} = 0. \quad (18)$$

При анализе функции $f(\lambda) = a - e^{-\lambda b} + e^{-\lambda c}$ ($a < 1, b < c$) определено наличие двух корней. Параметр λ_0 с использованием данного метода определяется из условия минимального расстояния до любого параметра, полученного одним из трех вышеописанных методов.

В Mathcad были сформированы выборки посредством функции $\text{гехр}()$ и на рис. 5 соответственно приведены графические реализации функции

$$f(\lambda) = \sum_{i=2}^{k-1} (p_i h) - e^{-\lambda x_2} + e^{-\lambda x_{k-1}}.$$

Рис. 5. Графики функции $f_2(\lambda) = \sum_{i=2}^{k-1} (p_i h) - e^{-\lambda x_2} + e^{-\lambda x_{k-1}}$ для выборок: *a* — $\text{гехр}(1000, 1)$; *б* — $\text{гехр}(1000, 3)$

Таким образом, введены четыре методики определения параметров статистической нулевой гипотезы, с целью установления их состоятельности при статистической обработке имитационных данных.

Использование критерия согласия χ^2 для оценки выдвинутой статистической нулевой гипотезы. В данном подразделе сформулируем критерий согласия χ^2 применительно к объекту нашего исследования — СМО.

Критерий согласия χ^2 при больших L (будем проводить имитационные эксперименты при $L = 1000$) на уровне значимости α (установим $\alpha = 0,05$) отклоняет гипотезу H_0 в пользу альтернативной гипотезы H_1 , если

$$\chi^2(\bar{x}_L) > \chi^2_{1-\alpha}(r-1), \quad (19)$$

где $\chi^2_{1-\alpha}(r-1)$ — квантиль уровня $1 - \alpha$ χ^2 распределения с $r - 1$ (в нашем случае $k - 2$) степенями свободы,

$$\text{а } \chi^2(\bar{x}_L) = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(p_i - \tilde{f}(\tilde{x}_i, \lambda_0))^2}{\tilde{f}(\tilde{x}_i, \lambda_0)}, \quad (20)$$

где $\tilde{f}(\tilde{x}_i, \lambda_0) = e^{-\lambda_0(\tilde{x}_i - h/2)} - e^{-\lambda_0(\tilde{x}_i + h/2)}$.

Если, в противном случае,

$$\chi^2(\bar{x}_L) \leq \chi^2_{1-\alpha}(r-1), \quad (21)$$

то делается вывод, что нулевая гипотеза H_0 не противоречит статистическим данным и принимается [10].

Дальнейшие исследования будут проводиться согласно следующему алгоритму.

1. Вводим математические ожидания a и b экспоненциальных законов распределения временных интервалов, соответственно, входящего потока и обслуживания ($a > b$).

2. Для количества заявок $L = 1000$ определяем минимальное τ_1 — модельное время, с которого заявки начинают поступать на обслуживание таким образом, чтобы при функционировании системы бункер-накопитель не обнулялся.

3. Проводим имитационный эксперимент, вычисляем четыре параметра — $\lambda_{01}, \lambda_{02}, \lambda_{03}, \lambda_{04}$, в соответствии с методиками, описанными выше.

4. Последовательно, для каждого параметра формируем статистические нулевые гипотезы и используем критерий согласия χ^2 для оценки выдвинутых гипотез.

5. Определяем шаг h в единицах модельного времени, переопределяем τ_1 по правилу: $\tau_1 = \tau_1 - h$ и переходим к п. 3.

В качестве критерия остановки алгоритма устанавливается правило: хотя бы при одном параметре ($\lambda_{01}, \lambda_{02}, \lambda_{03}, \lambda_{04}$) критерий согласия χ^2 отвергает выдвинутую нулевую статистическую гипотезу.

Ниже приведены табл. 1—4 с данными, определяемыми статистической обработкой имитационных экспериментов согласно предложенному алгоритму, с различными математическими ожиданиями (a и b) экспоненциальных законов распределения временных интервалов поступления и обслуживания заявок, с расчетными параметрами $\lambda_{01}, \lambda_{02}, \lambda_{03}, \lambda_{04}$ и соответствующими им $\chi^2(\bar{x}_L)|\lambda_{01}, \chi^2(\bar{x}_L)|\lambda_{02}, \chi^2(\bar{x}_L)|\lambda_{03}, \chi^2(\bar{x}_L)|\lambda_{04}$ согласно формуле (20). В последнем столбце таблиц представлено значение квантиля уровня $0,95\chi^2$ распределения с 9 степенями свободы (критерий остановки алгоритма).

Табл. 1. Результаты статистической обработки данных имитационных экспериментов при $a = 1$, $b = 1/2$ и $h = 10$

τ_1	λ_{01}	$\chi^2(\bar{x}_L) \lambda_{01}$	λ_{02}	$\chi^2(\bar{x}_L) \lambda_{01}$	λ_{03}	$\chi^2(\bar{x}_L) \lambda_{01}$	λ_{04}	$\chi^2(\bar{x}_L) \lambda_{01}$	$\chi^2_{0,95}(9)$
501	1,898	0,548	1,884	0,580	2,369	0,406	1,841	0,583	3,325
491	1,956	0,362	1,748	0,281	1,393	0,435	2,026	0,444	3,325
481	1,911	0,332	1,774	0,387	1,858	0,351	1,891	0,339	3,325
471	1,902	0,289	1,707	0,281	1,439	0,409	1,914	0,294	3,325
461	1,759	0,352	1,649	0,397	1,727	0,363	1,837	0,334	3,325
451	1,926	0,281	1,785	0,324	1,702	0,362	1,918	0,283	3,325
441	1,853	0,463	1,744	0,520	2,101	0,402	1,935	0,432	3,325
431	1,852	0,304	1,658	0,285	1,389	0,420	1,989	0,419	3,325
421	1,822	0,286	1,665	0,338	1,623	0,359	1,864	0,279	3,325
411	1,564	0,376	1,415	0,415	1,515	0,391	1,719	0,376	3,325
401	1,623	2,267	1,348	0,423	0,941	0,524	1,631	2,405	3,325
391	1,560	0,452	1,454	0,426	1,376	0,441	1,762	0,750	3,325
381	1,721	0,440	1,612	0,489	1,856	0,415	1,789	0,423	3,325
371	1,595	0,428	1,502	0,482	1,737	0,382	1,675	0,397	3,325
361	1,604	0,702	1,379	0,319	1,044	0,483	1,700	1,239	3,325
351	1,589	0,369	1,475	0,392	1,472	0,393	1,657	0,376	3,325
341	1,593	0,265	1,452	0,293	1,297	0,381	1,605	0,266	3,325
331	1,459	0,275	1,317	0,292	1,154	0,395	1,518	0,294	3,325
321	1,474	0,503	1,395	0,551	1,692	0,462	1,622	0,459	3,325
311	1,485	0,458	1,406	0,486	1,557	0,452	1,586	0,455	3,325
301	1,436	0,342	1,311	0,336	1,179	0,403	1,541	0,425	3,325
291	1,469	0,324	1,338	0,349	1,269	0,385	1,567	0,354	3,325
281	1,354	0,316	1,224	0,339	1,136	0,393	1,412	0,331	3,325
271	1,391	0,305	1,266	0,367	1,283	0,356	1,460	0,290	3,325
261	1,394	0,343	1,273	0,373	1,248	0,386	1,488	0,366	3,325
251	1,300	0,391	1,221	0,438	1,323	0,381	1,423	0,359	3,325
241	1,337	0,368	1,254	0,412	1,319	0,376	1,497	0,351	3,325
231	1,313	0,403	1,228	0,445	1,325	0,399	1,470	0,404	3,325
221	1,370	0,498	1,296	0,556	1,162	0,703	1,439	0,457	3,325
211	1,261	0,296	1,146	0,349	1,121	0,367	1,303	0,289	3,325
201	1,195	0,295	1,071	0,304	0,936	0,410	1,312	0,404	3,325
191	1,293	0,282	1,168	0,305	1,291	0,281	1,347	0,296	3,325
181	1,247	0,422	1,162	0,484	1,344	0,380	1,376	0,374	3,325
171	1,210	0,496	1,138	0,557	1,418	0,414	1,353	0,425	3,325
161	1,262	0,489	1,202	0,539	1,487	0,394	1,419	0,407	3,325
151	1,235	0,442	1,185	0,479	1,360	0,385	1,359	0,385	3,325
141	1,125	0,506	1,064	0,556	1,299	0,460	1,246	0,458	3,325
131	1,142	0,407	1,083	0,452	1,217	0,369	1,181	0,385	3,325
121	1,151	0,283	1,059	0,343	1,055	0,347	1,169	0,275	3,325
111	1,077	0,429	1,019	0,479	1,175	0,380	1,174	0,380	3,325
101	1,113	0,386	1,047	0,441	1,163	0,357	1,192	0,344	3,325
91	1,089	0,369	1,025	0,421	1,118	0,353	1,072	0,382	3,325
81	1,058	0,565	1,019	0,608	1,333	0,443	1,133	0,502	3,325
71	1,077	0,458	1,017	0,508	1,205	0,406	1,055	0,475	3,325
61	1,106	0,548	1,061	0,593	1,366	0,447	1,196	0,482	3,325
51	1,017	0,272	0,927	0,314	0,866	0,367	0,999	0,277	3,325
41	1,038	0,593	0,994	0,639	1,313	0,533	1,070	0,566	3,325
31	1,045	0,592	1,014	0,628	1,053	0,583	1,084	0,553	3,325
21	1,041	0,683	0,997	0,739	1,147	0,584	1,075	0,646	3,325
11	1,035	0,396	0,977	0,447	1,099	0,355	0,995	0,429	3,325
1	0,988	0,659	0,955	0,703	1,361	0,514	0,964	0,689	3,325

Табл. 2. Результаты статистической обработки данных имитационных экспериментов при $a = 1$, $b = 1/3$ и $h = 10$

τ_1	λ_{01}	$\chi^2(\bar{x}_L) \lambda_{01}$	λ_{02}	$\chi^2(\bar{x}_L) \lambda_{01}$	λ_{03}	$\chi^2(\bar{x}_L) \lambda_{01}$	λ_{04}	$\chi^2(\bar{x}_L) \lambda_{01}$	$\chi^2_{0,95}(9)$
668	2,846	0,349	2,678	0,399	2,861	0,344	2,757	0,374	3,325
658	2,772	0,543	2,423	0,318	1,887	0,467	2,918	0,820	3,325
648	2,720	0,947	2,352	0,357	1,711	0,502	2,829	1,419	3,325
638	2,763	0,377	2,556	0,402	2,586	0,395	2,911	0,389	3,325
628	2,506	1,312	2,104	0,353	1,520	0,500	2,492	1,232	3,325
618	2,422	0,997	2,009	0,261	1,348	0,567	2,576	2,160	3,325
608	2,545	0,848	2,288	0,541	2,036	1,093	2,797	0,917	3,325
598	2,780	1,955	2,380	0,485	1,636	0,552	2,977	4,517	3,325
...									
568	2,349	11,66	1,882	0,828	1,197	0,609	2,410	16,80	3,325

Табл. 3. Результаты статистической обработки данных имитационных экспериментов при $a = 1$, $b = 1/4$ и $h = 10$

τ_1	λ_{01}	$\chi^2(\bar{x}_L) \lambda_{01}$	λ_{02}	$\chi^2(\bar{x}_L) \lambda_{01}$	λ_{03}	$\chi^2(\bar{x}_L) \lambda_{01}$	λ_{04}	$\chi^2(\bar{x}_L) \lambda_{01}$	$\chi^2_{0,95}(9)$
751	4,098	0,437	3,906	0,486	4,096	0,440	3,845	0,503	3,325
741	3,594	0,346	3,310	0,364	3,160	0,393	3,859	0,387	3,325
731	3,404	0,644	3,098	0,470	2,741	0,472	3,827	1,479	3,325
721	3,473	3,507	2,853	0,522	2,951	0,654	3,645	6,536	3,325
711	3,392	4,295	2,960	0,491	2,753	0,731	3,749	6,355	3,325

Табл. 4. Результаты статистической обработки данных имитационных экспериментов при $a = 1$, $b = 1/5$ и $h = 10$

τ_1	λ_{01}	$\chi^2(\bar{x}_L) \lambda_{01}$	λ_{02}	$\chi^2(\bar{x}_L) \lambda_{01}$	λ_{03}	$\chi^2(\bar{x}_L) \lambda_{01}$	λ_{04}	$\chi^2(\bar{x}_L) \lambda_{01}$	$\chi^2_{0,95}(9)$
801	4,847	0,344	4,573	0,389	4,798	0,352	5,005	0,326	3,325
791	4,553	7,953	3,721	0,785	3,389	0,447	4,801	16,83	3,325

Вычисления производились с использованием средств Visual Basic for Applications и Mathcad с точностью 10^{-6} .

На основании анализа данных, приведенных в табл. 1—4, можно сделать определенные выводы:

во-первых, с увеличением отношения a/b временной модельный интервал, в пределах которого согласно статистическим данным можно оценивать выходящий поток с помощью экспоненциального закона распределения, уменьшается, а при $a/b > 5$ фактически равен нулю;

во-вторых, в пределах допустимого временного модельного интервала математическое ожидание экспоненциального распределения изменяется согласно линейному закону;

в-третьих, необходимо отметить, что параметр нулевой статистической гипотезы, вычисленный с использованием аппроксимационного «интегрального» метода, оказался наиболее «чувствительным» в отказе принятия нулевой статистической гипотезы.

Таким образом, необходимо провести анализ данных, полученных в ходе имитационных экспериментов в следующих направлениях.

1. Оценить временной модельный интервал, в пределах которого, согласно статистическим данным, можно оценивать выходящий поток с помощью экспоненциального закона распределения.

2. Определить функциональную зависимость значений допустимого интервала и параметра (частоты λ) экспоненциального закона распределения, определяющего выходящий поток.

Для оценки допустимого временного модельного интервала проведем замену двух параметров (a и b), определяющих средние времена входящего потока и обслуживания, их отношением (z) и перейдем к численному анализу двухмерных узлов (x_i, y_i) : $(2, \infty)$, $(3, 70)$, $(4, 30)$, $(5, 10)$. Проведем аппроксимацию трех последних с использованием метода наименьших квадратов функцией

$f(z, d) = \frac{d}{z-2}$, где d — аппроксимационный параметр. В результате метода

определяем $d = \sum_i y_i / \left(\sum_i 1/x_i - 2 \right)$ и, переходя к численному выражению,

принимаем $d \approx 60$. Учитывая что, при $a/b \geq 5$, допустимого интервала не существует, перейдем к рассмотрению функции

$$f1(z) = \frac{d}{z-2} - y_4 = \frac{60}{z-2} - 10, \quad (22)$$

т.е. сознательно уменьшаем значение допустимого временного модельного интервала, учитывая, что изначальные ограничения были сформулированы относительно средних времен входящего потока и обслуживания, а функционирование системы носит случайный характер.

Графические интерпретации узлов и аппроксимационных функций приведены на рис. 6.

Рис. 6. Графическая интерпретация функции $f1(z) = \frac{60}{z-2} - 10$, определяющей значение допустимого модельного интервала

Учитывая результаты статистической обработки имитационных данных, можно сделать вывод о линейном законе изменения параметра в пределах допустимого модельного временного интервала. Таким образом, возможно определить

$$1/\lambda(t) = \frac{b-a}{\tau_{\max}-1}t + \frac{a\tau_{\max}-b}{\tau_{\max}-1}, \quad (23)$$

где $\tau_{\max} = \lceil N(a-b) + a \rceil$.

На данном этапе необходимо установить адекватность предложенных методик расчета (22)—(23) с реальным функционированием СМО. В связи с этим предлагается последовательно осуществить определенную последовательность шагов:

определяем a и b — средние времена входящего потока и обслуживания экспоненциальных законов распределения ($\lambda_a = 1/a$ и $\lambda_b = 1/b$), учитывая условие ($a > b$) и соответственно $z = a/b = \lambda_b/\lambda_a$;

используя формулу (8), получаем значение максимального допустимого временного модельного интервала Δ , при котором выходящий поток сохраняет согласно статистическим оценкам структуру экспоненциального закона;

произвольным образом выбираем t , принадлежащее допустимому интервалу и, используя функцию (9), определяем для $\tau_{\max} - t = \lceil N(a-b) + a \rceil - t$ значение λ_t ;

определяем $\exp_{0,05}(\lambda_t)$ квантиль уровня 0,05 экспоненциального распределения с частотой λ_t и $\exp_{0,95}(\lambda_t)$ квантиль уровня 0,95 экспоненциального распределения с частотой λ_t ;

проводим имитационный эксперимент с параметрами $\lambda_a = 1/a$, $\lambda_b = 1/b$, $N = 1000$ и $\tau_1 = \tau_{\max} - t$ и оцениваем суммарное количество интервалов Sum попадающих в интервал $(\exp_{0,05}(\lambda_t), \exp_{0,95}(\lambda_t))$;

из полученных данных формируем таблицу.

Табл. 5. Результаты расчетов применения методики выбора интервала задержки начала обслуживания и частоты выходящего потока, совместно с данными имитационных экспериментов

a	b	Δ	$\tau_{\max} - t$	λ_t	$\exp_{0,05}(\lambda_t)$	$\exp_{0,95}(\lambda_t)$	Sum
1	2,8	65	611	2,563	0,02	1,169	923
1	3,4	32	701	3,332	0,015	0,899	913
1	4,2	18	752	4,015	0,013	0,746	879
1	1,7	∞	75	1,08	0,047	2,774	887

Оценивая $\frac{\max_i |900 - Sum_i|}{900} 100\% < 3\%$, можно признать адекватность при-

менения описанной выше методики [11—13].

Заключение. Для введенной в рассмотрение в [1] СМО, значительно расширены границы ситуационной таблицы, оценивающей возможность описания выходящего потока экспоненциальным законом распределения временных интервалов между покидающими систему заявками. Предложены и обосно-

ваны методики расчетов допустимых интервалов и параметра распределения (22)—(23), что в свою очередь позволяет рассматривать данную СМО как фазу в последовательной СеМО.

Библиографический список

1. *Ануфриев Д.П., Холодов А.Ю.* Имитационная модель системы массового обслуживания с накопителем и интервальной задержкой начала обслуживания // Перспективы развития строительного комплекса : материалы VII Междунар. науч.-практ. конф. профес.-преп. сост., молодых уч. и студ. 28—31 октября 2013 г. / под ред. В.А. Гутмана, А.Л. Хаченьяна. Астрахань : ГАОУ АО ВПО «АИСИ», 2013. Т. 1. С. 88—94.
2. *Ануфриев Д.П.* Жилище как элемент социально-экономической системы региона: опыт прикладного исследования // Вестник МГСУ. 2014. № 2. С. 187—195.
3. *Ануфриев Д.П.* Математическая модель регионального строительного комплекса // Астрахань — дом будущего : тезисы II Междунар. науч.-практ. конф. Астрахань : Изд. Сорокин Роман Васильевич, 2010. С. 58—73.
4. *Каргаполова Е.В., Арясова А.Ю., Гречкина Т.Ю., Лебединцева Л.А., Убогович Ю.И.* Социокультурный портрет Астраханской области: опыт социологического, экономического и политического анализа : монография. Волгоград : Волгоградское науч. изд-во, 2010. 307 с.
5. *Ануфриев Д.П.* Управление строительным комплексом как социально-экономической системой: постановка проблемы // Промышленное и гражданское строительство. 2012. № 8. С. 8—10.
6. *Konheim A.G., Reiser M.* A Queueing Model with Finite Waiting Room and Blocking // J. Assoc. Comput. Mach. 1976. Vol. 23. No. 2. Pp. 328—341.
7. *Kuehn P.* Approximate analysis of general queueing networks by Decomposition // IEEE Transact. on Communications. 1979. Vol. 27. No. 1. Pp. 113—126.
8. *Холодов А.Ю.* Имитационная модель финансовых взаимоотношений участников долевого строительства // Имитационное моделирование. Теория и практика : сб. док. V Всеросс. науч.-практ. конф. ИММОД-2011. СПб. : ОАО «ЦТСС». 2011. Т. 2. С. 300—302.
9. *Холодов А.Ю., Ануфриев Д.П.* Имитационное моделирование финансовых взаимоотношений участников долевого строительства и оценки рисков строительных организаций при комплексной застройке // Тр. Всеросс. науч.-практ. конф. по имитационному моделированию соц.-эконом. систем (ВКИМСЭС). 15 мая 2012 г. М. : ООО «Принт-Сервис», 2012. С. 120—124.
10. *Закс Ш.* Теория статистических выводов / пер. с англ. М. : Мир, 1975. 776 с.
11. *Шеннон Р.* Имитационное моделирование систем — искусство и наука / пер. с англ. под ред. Е.К. Масловского. М. : Мир, 1978. 420 с.
12. *Economou A., Fakinos D.* Product form stationary distributions for queueing networks with blocking and rerouting // Queueing Systems: Theory Appl. 1998. Vol. 30. No. 3/4. Pp. 251—260.
13. *Williams R.J.* Diffusion approximations for open multiclass queueing networks: sufficient conditions involving state space collapse // Queueing Systems: Theory Appl. 1998. Vol. 30. No. 1/2. Pp. 27—88.

Поступила в редакцию в июле 2014 г.

Об авторах: **Ануфриев Дмитрий Петрович** — кандидат технических наук, профессор, ректор, **Астраханский инженерно-строительный институт (ГАОУ АО ВПО «АИСИ»)**, 414056, г. Астрахань, ул. Татищева, д. 18, adp_2000@mail.ru;

Холодов Артем Юрьевич — кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры физики и математики, информационных технологий, **Астраханский инженерно-строительный институт (ГАОУ АО ВПО «АИСИ»)**, 414056, г. Астрахань, ул. Татищева, д. 18, artemhol@rambler.ru.

Для цитирования: *Ануфриев Д.П., Холодов А.Ю.* Статистический анализ имитационных экспериментов модели системы массового обслуживания с накопителем и интервальной задержкой начала обслуживания // Вестник МГСУ. 2014. № 10. С. 197—211.

D.P. Anufriev, A.Yu. Kholodov

STATISTICAL ANALYSIS OF SIMULATIONS OF QUEUING SYSTEM MODELS WITH BUNKER STORAGE AND INTERVAL DELAY OF THE INCEPTION OF SERVICE

The present work is concerned with statistical analysis of functional characteristics' estimation of the outlet flow with the purpose to transfer to the analysis of multiphase series-connected queuing net, where a definite queuing system will be considered as a phase. The authors observe statistical methods of fitting criteria use in the process of parametric hypotheses check.

The article presents a series of simulation experiments and statistical analysis aimed at to determining the parameter dependencies of the queuing system with storage hopper and interval delay in the beginning of service basing on the condition of identity types of incoming and outgoing flows of applications. On the basis of the expected incoming flow and servicer, the authors defined the method for calculating the maximum possible interval between the beginning of service system and effluent applications in relation to the type of exponential distribution. The study also developed a technique to obtain the parameters of the statistical null hypothesis using approximation approaches based on least squares method and the integral method.

Key words: queuing system, null hypothesis, exponential law, distribution of time intervals, approximating approaches, goodness of fit, parametric hypothesis.

References

1. Anufriev D.P., Kholodov A.Yu. Imitatsionnaya model' sistemy massovogo obsluzhivaniya s nakopitelem i interval'noy zaderzhkoy nachala obsluzhivaniya [Simulation Model of a Queuing System with Storage and Interval Delay of the Beginning of Service]. *Perspektivy razvitiya stroitel'nogo kompleksa : materialy VII Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii professorsko-prepodavatel'skogo sostava, molodykh uchenykh i studentov 28—31 oktyabrya 2013 goda* [Prospects for the Development of the Building Complex: Materials of the 7th International Scientific-practical Conference of Academic Staff, Students and Young Scientists, October 28—31, 2013]. Edited by V.A. Gutman, A.L. Khachen'yan. Astrakhan, GAOU AO VPO «АИСИ» Publ., 2013, vol. 1, pp. 88—94. (in Russian)
2. Anufriev D.P. Zhilishche kak element sotsial'no-ekonomicheskoy sistemy regiona: opyt prikladnogo issledovaniya [Housing as an Element of Regional Social and Economic System: the Experience of Applied Research]. *Vestnik MGSU* [Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering]. 2014, no. 2, pp. 187—195. (in Russian)
3. Anufriev D.P. Matematicheskaya model' regional'nogo stroitel'nogo kompleksa [Mathematical Model of Regional Building Complex]. *Astrakhan' — dom budushchego: Tezisy 2 Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii* [Astrakhan — Home of the Future. Proceedings of the 2nd International Scientific and Practical Conference]. Astrakhan, 2010, pp. 58—73. (in Russian)
4. Kargapolova E.V., Aryasova A.Yu., Grechkina T.Yu., Lebedintseva L.A., Ubogovich Yu.I. *Sotsiokul'turnyy portret Astrakhanskoy oblasti: opyt sotsiologicheskogo, ekonomicheskogo i politicheskogo analiza: monografiya* [Social and Cultural Portrait of the Astrakhan Region: the Experience of Sociological, Economic and Political Analysis]. Volgograd, Volgogradskoe nauchnoe izdatel'stvo Publ., 2010, 307 p. (in Russian)

5. Anufriev D.P. Upravlenie stroitel'nym kompleksom kak sotsial'no-ekonomicheskoy sistemoy: postanovka problemy [Managing the Building Complex as a Social and Economic System: Problem Statement]. *Promyshlennoe i grazhdanskoe stroitel'stvo* [Industrial and Civil Engineering]. 2012, no. 8, pp. 8—10. (in Russian)
6. Konheim A.G., Reiser M. A Queueing Model with Finite Waiting Room and Blocking. *J. Assoc. Comput. Mach.* 1976, vol. 23, no. 2, pp. 328—341. DOI: <http://dx.doi.org/10.1145/321941.321952>.
7. Kuehn P. Approximate Analysis of General Queueing Networks by Decomposition. *IEEE Transact. on Communications.* 1979, vol. 27, no. 1, pp. 113—126. DOI: <http://dx.doi.org/10.1109/TCOM.1979.1094270>.
8. Kholodov A.Yu. Imitatsionnaya model' finansovykh vzaimootnosheniy uchastnikov dolevogo stroitel'stva [Simulation Model of Financial relations between the Participants of Shared Construction]. *Imitatsionnoe modelirovanie. Teoriya i praktika : sbornik dokladov 5 Vserossiyskoy nauchno-prakticheskoy konferentsii IMMOD-2011* [Simulation. Theory and Practice: Proceedings of the 5th Anniversary All-Russian Scientific-Practical Conference IMMOD 2011]. Saint Petersburg, OAO «TsTSS» Publ., 2011, vol. 2, pp. 300—302. (in Russian)
9. Kholodov A.Yu., Anufriev D.P. Imitatsionnoe modelirovanie finansovykh vzaimootnosheniy uchastnikov dolevogo stroitel'stva i otsenki riskov stroitel'nykh organizatsiy pri kompleksnoy zastroyke [Simulation Modeling of Financial Relationships in Participatory Construction and Risk Assessment of Construction Companies in the Process of Complex Building]. *Trudy Vserossiyskoy nauchno-prakticheskoy konferentsii po imitatsionnomu modelirovaniyu sotsial'no-ekonomicheskikh sistem (VKIMSES) 15 maya 2012 goda* [Works of the International Scientific and Practical Conference on Simulation of Socio-economic Systems, 15 May, 2012]. Moscow, OOO «Print-Servis» Publ., 2012, pp. 120—124. (in Russian)
10. Zacks S. Theory of Statistical Inference. John Wiley & Sons Inc; First Edition edition, 626 p.
11. Shannon R. Systems Simulation: The Art and Science. Prentice Hall, 368 p.
12. Economou A., Fakinos D. Product Form Stationary Distributions for Queueing Networks with Blocking and Rerouting. *Queueing Systems: Theory Appl.* 1998, vol. 30, no. 3/4, pp. 251—260. DOI: <http://dx.doi.org/10.1023/A:1019117121530>.
13. Williams R.J. Diffusion Approximations for Open Multiclass Queueing Networks: Sufficient Conditions Involving State Space Collapse. *Queueing Systems: Theory Appl.* 1998, vol. 30, no. 1/2, pp. 27—88. DOI: [10.1023/A:1019108819713](http://dx.doi.org/10.1023/A:1019108819713).

About the authors: **Anufriev Dmitry Petrovich** — Candidate of Technical Sciences, Professor, Rector, **Astrakhan Institute of Civil Engineering (ACEI)**, 18 Tatishcheva st., Astrakhan, 414056, Russian Federation; adp_2000@mail.ru;

Kholodov Artem Yur'evich — Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Physics and Mathematics, **Astrakhan Institute of Civil Engineering (ACEI)**, 18 Tatishchev St., Astrakhan, 414056, Russian Federation, artemhol@rambler.ru.

For citation: Anufriev D.P., Kholodov A.Yu. Statisticheskiy analiz imitatsionnykh eksperimentov modeli sistemy massovogo obsluzhivaniya s nakopitelem i interval'noy zaderzhkoy nachala obsluzhivaniya [Statistical Analysis of Simulations of Queueing System Models with Bunker Storage and Interval Delay of the Inception of Service]. *Vestnik MGSU* [Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering]. 2014, no. 10, pp. 197—211. (in Russian)