ГИДРАВЛИКА. ИНЖЕНЕРНАЯ ГИДРОЛОГИЯ. ГИДРОТЕХНИЧЕСКОЕ СТРОИТЕЛЬСТВО

УДК 532.542.1

А.Л. Зуйков

ФГБОУ ВПО «МГСУ»

АЗИМУТАЛЬНЫЙ ВИХРЬ И ФУНКЦИЯ ТОКА В ПОЛЗУЩЕМ ТЕЧЕНИИ В ТРУБЕ

Посвящена аналитическому исследованию структуры установившегося неравномерного ползущего течения в цилиндрическом канале. Показано, что структура течения определяется уравнением Лапласа относительно азимутального вихря скорости и уравнением Пуассона относительно функции тока. Распределения азимутального вихря и функции тока получены в виде рядов Фурье — Бесселя.

Ключевые слова: ползущее течение, азимутальный вихрь, функция тока, уравнение Лапласа, уравнение Пуассона, разложение Фурье — Бесселя.

Ползущие течения широко распространены в природе [1], исследованию их гидродинамики при производстве полимеров посвящены [2—4]. В [5, 6] показано, что структура установившегося неравномерного ползущего течения в цилиндрической трубе определяется уравнением Лапласа, которое при симметричном относительно оси канала течении имеет вид

$$\frac{\partial^2 \omega_\theta}{\partial r^2} + \frac{\partial \omega_\theta}{r \partial r} - \frac{\omega_\theta}{r^2} + \frac{\partial^2 \omega_\theta}{\partial x^2} = 0, \quad (1)$$

где r и x — радиальная и продольная координаты (рис. 1); ω_θ — азимутальный вихрь (вихрь по азимутальной координате θ),

$$\omega_\theta = \frac{\partial u_r}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial r}; \quad (2)$$

u_r и u_x — радиальные и аксиальные скорости.

Рис. 1. Схема течения

Согласно (1) распределения таких структурных характеристик ползущего течения, как азимутального вихря, функции тока, радиальных и аксиальных скоростей, не зависят от физических свойств жидкости и распределения ази-

мутальных скоростей u_θ . При равномерном течении, при котором частные производные по продольной координате x равны нулю, уравнение (1) сведется к

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial(r\omega_\theta)}{r\partial r} \right] = 0, \quad (3)$$

а азимутальный вихрь (2) будет равен

$$\omega_\theta = -\frac{\partial u_x}{\partial r}.$$

Интегрируя (3), находим

$$\omega_\theta = -\frac{\partial u_x}{\partial r} = Cr + \frac{C_1}{r}, \quad (4)$$

откуда в результате получаем

$$u_x = -\frac{r^2}{2} - C_1 \ln(r) + C_2,$$

где C , C_1 и C_2 — константы.

Поскольку на оси трубы при $r = 0$ аксиальная скорость имеет конечное значение, не равное $\pm\infty$, то $C_1 = 0$. Принимая на стенках трубы радиусом R вследствие вязкого прилипания жидкости $u_x = 0$, получаем $C_2 = CR^2/2$ и

$$u_x = \frac{CR^2}{2} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right). \quad (5)$$

Интегрируя (5), определим среднюю по расходу Q скорость потока

$$V = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R u_x 2\pi r dr = \frac{C}{2} \int_0^R \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) dr^2 = \frac{CR^2}{4},$$

откуда $C = 4V/R^2$ и

$$u_x = 2V \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right), \text{ или в нормированной форме } \dot{u}_x = 2(1 - \dot{r}^2), \quad (6)$$

где $\dot{u}_x = u_x/V$ и $\dot{r} = r/R$.

Следовательно, при равномерном ползущем течении распределение аксиальных скоростей по сечению трубы соответствует профилю Пуазейля [7] для ламинарного потока. Положим этот профиль граничным условием на бесконечном удалении от входа в трубу (при $x = \infty$), поскольку именно к такому распределению скоростей стремится неравномерное ползущее течение, имеющее на входе произвольный профиль.

Для определения трансформации течения на участке от входа в трубу до створа с профилем Пуазейля нормируем уравнение (1)

$$\frac{\partial^2 \dot{\omega}_\theta}{\partial \dot{r}^2} + \frac{\partial \dot{\omega}_\theta}{\dot{r} \partial \dot{r}} - \frac{\dot{\omega}_\theta}{\dot{r}^2} + \frac{\partial^2 \dot{\omega}_\theta}{\partial \dot{x}^2} = 0, \quad (7)$$

где $\dot{\omega}_\theta = \frac{\partial \dot{u}_r}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \dot{u}_x}{\partial \dot{r}}$, $\dot{u}_r = \frac{u_r}{V}$ и $\dot{x} = \frac{x}{R}$.

Кроме профиля Пуазейля (6) необходимым условием является сохранение объемного расхода по длине трубы ввиду непроницаемости ее стенок и несжимаемости жидкости

$$\int_0^1 \dot{u}_x 2\dot{r}dr = 1 \text{ для } \dot{x} \geq 0. \quad (8)$$

Для решения задачи (7) воспользуемся методом Фурье, положив азимутальный вихрь произведением двух функций $\dot{\omega}_\theta(\dot{r}, \dot{x}) = \phi(\dot{r}) \cdot \varphi(\dot{x})$, где один из сомножителей зависит только от текущего радиуса, а второй — от осевой координаты. Это позволяет привести уравнение (7) к равенству

$$\frac{1}{\varphi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \dot{x}^2} = -\frac{1}{\phi} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \dot{r}^2} + \frac{\partial \phi}{\dot{r} \partial \dot{r}} - \frac{\phi}{\dot{r}^2} \right),$$

выполнение которого обеспечивается только в том случае, если его правая часть, являющаяся произведением функций от $\dot{x}$, и левая часть, являющаяся произведением функций только от $\dot{r}$, одновременно не зависят ни от $\dot{x}$, ни от $\dot{r}$, т.е. обе части равны одной и той же постоянной h , называемой константой разделения

$$\frac{1}{\varphi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \dot{x}^2} = -\frac{1}{\phi} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \dot{r}^2} + \frac{\partial \phi}{\dot{r} \partial \dot{r}} - \frac{\phi}{\dot{r}^2} \right) = \eta.$$

Таким образом, приходим к задаче Штурма — Лиувилля [8] с системой обыкновенных линейных дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \dot{r}^2} + \frac{\partial \phi}{\dot{r} \partial \dot{r}} + \left(\eta - \frac{1}{\dot{r}^2} \right) \phi &= 0; \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \dot{x}^2} - \eta \varphi &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

имеющей три решения в зависимости от того: $\eta < 0$, $\eta = 0$ или $\eta > 0$.

В первом случае положим $\eta = -\lambda_n^2 < 0$. Тогда система (9) приводится к виду

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \dot{r}^2} + \frac{\partial \phi}{\dot{r} \partial \dot{r}} - \left(\lambda_n^2 + \frac{1}{\dot{r}^2} \right) \phi &= 0; \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \dot{x}^2} + \lambda_n^2 \varphi &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Первое уравнение этой системы представляет собой модифицированное уравнение Бесселя [9], имеющее только мнимые корни. На этом основании случай $\eta < 0$ следует исключить из дальнейшего рассмотрения.

Во втором случае при $\eta = 0$ находим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \dot{r}^2} + \frac{\partial \phi}{\dot{r} \partial \dot{r}} - \frac{\phi}{\dot{r}^2} &= 0; \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \dot{x}^2} &= 0, \end{aligned} \right\}$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \dot{r} + \frac{C_1}{\dot{r}}; \\ \varphi &= C_2 \dot{x} + C_3, \end{aligned} \right\}$$

и

$$\dot{\omega}_\theta = \phi \varphi = \left(C \dot{r} + \frac{C_1}{\dot{r}} \right) (C_2 \dot{x} + C_3). \quad (10)$$

В решении (10) константу интегрирования C_2 следует положить равной нулю в соответствии с первым граничным условием (6), согласно которому при $\dot{x} = \infty$ азимутальный вихрь должен иметь конечное значение, равное

$$\dot{\omega}_\theta = -\frac{\partial \dot{u}_x}{\partial \dot{r}} = -\frac{\partial}{\partial \dot{r}} \left[2(1 - \dot{r}^2) \right] = 4\dot{r}. \quad (11)$$

Положив далее $C_3 = 1$, приходим к выражению (4), отражающему радиальное изменение аксиального вихря при равномерном ползущем течении. При этом согласно ранее полученному имеем $C_1 = 0$, а согласно (11) $C = 4$.

Таким образом, при $\eta = 0$ решением задачи (7) является равенство (11).

В третьем случае $\eta = \lambda_n^2 > 0$, тогда система (9) примет вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \dot{r}^2} + \frac{\partial \phi}{\partial \dot{r}} + \left(\lambda_n^2 - \frac{1}{\dot{r}^2} \right) \phi &= 0; \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \dot{x}^2} - \lambda_n^2 \varphi &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Первое уравнение этой системы является однородным уравнением Бесселя [9], имеющим n -е частное решение

$$\phi_n = A_n J_1(\lambda_n \dot{r}),$$

где A_n — постоянная; $J_1(\lambda_n \dot{r})$ — функция Бесселя 1-го рода 1-го порядка, а решением второго является

$$\varphi_n = C_1 \exp(\lambda_n \dot{x}) + C_2 \exp(-\lambda_n \dot{x}),$$

причем константу C_1 здесь согласно первому граничному условию (8) следует положить равной нулю.

При полной системе частных решений получаем ряд Фурье — Бесселя

$$\dot{\omega}_\theta = \phi \varphi = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_1(\lambda_n \dot{r}) \exp(-\lambda_n \dot{x}), \quad (12)$$

где константа C_2 вошла в постоянную A_n .

Общее решение задачи (7) запишем как сумму (11) и (12)

$$\dot{\omega}_\theta(\dot{r}, \dot{x}) = \frac{\partial \dot{u}_r}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \dot{u}_x}{\partial \dot{r}} = 4\dot{r} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_1(\lambda_n \dot{r}) \exp(-\lambda_n \dot{x}). \quad (13)$$

Получив радиально-аксиальное распределение азимутального вихря в установившемся неравномерном ползущем течении, обратимся к отысканию функции тока Ψ , которая для двумерного симметричного относительно оси трубы течения связана с радиальными и аксиальными скоростями равенствами

$$u_r = -\frac{\partial \Psi}{r \partial x}, \quad u_x = \frac{\partial \Psi}{r \partial r}, \quad (14)$$

обрабатываем уравнение неразрывности

$$\frac{\partial(r u_r)}{r \partial r} + \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0$$

в тождество. Подставляя выраженные через функцию тока значения радиальных и аксиальных скоростей в (2), в результате получаем уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} - \frac{\partial \Psi}{r \partial r} = -r \omega_0$$

или, переходя к его нормированной форме, согласно (13) запишем

$$\frac{\partial^2 \dot{\Psi}}{\partial \dot{x}^2} + \frac{\partial^2 \dot{\Psi}}{\partial \dot{r}^2} - \frac{\partial \dot{\Psi}}{\dot{r} \partial \dot{r}} = -4\dot{r}^2 - \dot{r} \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_1(\lambda_n \dot{r}) \exp(-\lambda_n \dot{x}), \quad (15)$$

где $\dot{\Psi} = \frac{\Psi}{Q}$.

Положим функцию тока равной сумме

$$\dot{\Psi}(\dot{r}, \dot{x}) = \dot{\Psi}_1(\dot{r}) + \dot{\Psi}_2(\dot{r}, \dot{x}), \quad (16)$$

где $\dot{\Psi}_1(\dot{r})$ и $\dot{\Psi}_2(\dot{r}, \dot{x})$ — являются решениями уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \dot{\Psi}_1}{\partial \dot{r}^2} - \frac{\partial \dot{\Psi}_1}{\dot{r} \partial \dot{r}} &= -4\dot{r}^2; \\ \frac{\partial^2 \dot{\Psi}_2}{\partial \dot{x}^2} + \frac{\partial^2 \dot{\Psi}_2}{\partial \dot{r}^2} - \frac{\partial \dot{\Psi}_2}{\dot{r} \partial \dot{r}} &= -\dot{r} \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_1(\lambda_n \dot{r}) \exp(-\lambda_n \dot{x}). \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Первое уравнение системы (17) определяет радиальное распределение функции тока при $\dot{x} = \infty$, и приводится к виду

$$\frac{\partial}{\partial \dot{r}} \left(\frac{\partial \dot{\Psi}_1}{\dot{r} \partial \dot{r}} \right) = \frac{\partial \dot{u}_x}{\partial \dot{r}} = -4\dot{r},$$

откуда

$$\int_{u_x}^0 d\dot{u}_x = \int_{\frac{\partial \dot{\Psi}_1}{\dot{r} \partial \dot{r}}}^0 d \left(\frac{\partial \dot{\Psi}_1}{\dot{r} \partial \dot{r}} \right) = -4 \int_r^1 \dot{r} d\dot{r} \quad \text{или} \quad \dot{u}_x = \frac{\partial \dot{\Psi}_1}{\dot{r} \partial \dot{r}} = 2(1 - \dot{r}^2),$$

и

$$\int_0^{\dot{\Psi}_1} d\dot{\Psi}_1 = 2 \int_0^{\dot{r}} (1 - \dot{r}^2) \dot{r} d\dot{r} \quad \text{или} \quad \dot{\Psi}_1 = \dot{r}^2 \left(1 - \frac{\dot{r}^2}{2} \right). \quad (18)$$

Общее решение второго уравнения системы (17) может быть получено в виде суммы ряда бесконечного множества частных решений

$$\dot{\Psi}_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{\Psi}_{2n}, \quad (19)$$

найденных из уравнений

$$\frac{\partial^2 \dot{\Psi}_{2n}}{\partial \dot{x}^2} + \frac{\partial^2 \dot{\Psi}_{2n}}{\partial \dot{r}^2} - \frac{\partial \dot{\Psi}_{2n}}{\dot{r} \partial \dot{r}} = -A_n \dot{r} J_1(\lambda_n \dot{r}) \exp(-\lambda_n \dot{x}). \quad (20)$$

Разложением Фурье частного решения для функции тока на произведение двух сомножителей $\Psi_{2n}(\dot{r}, \dot{x}) = \phi_n(\dot{r}) \cdot \varphi_n(\dot{x})$, один из которых $\phi_n(\dot{r})$ зависит только от текущего радиуса, а второй $\varphi_n(\dot{x})$ — только от осевой координаты, приведем (20) к виду

$$\phi_n \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial \dot{x}^2} + \varphi_n \left(\frac{\partial^2 \phi_n}{\partial \dot{r}^2} - \frac{\partial \phi_n}{\partial \dot{r}} \right) = -A_n \dot{r} J_1(\lambda_n \dot{r}) \exp(-\lambda_n \dot{x}).$$

Теперь разделив полученное уравнение на $\phi_n \varphi_n$ и перенеся многочлен в скобках в его правую часть, находим

$$\frac{1}{\varphi_n} \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial \dot{x}^2} = -\frac{1}{\phi_n} \left(\frac{\partial^2 \phi_n}{\partial \dot{r}^2} - \frac{\partial \phi_n}{\partial \dot{r}} + A_n \dot{r} J_1(\lambda_n \dot{r}) \frac{\exp(-\lambda_n \dot{x})}{\varphi_n} \right). \quad (21)$$

Можно видеть, что левая часть полученного равенства зависит только от аксиальной координаты, а правая — только от радиальной, если

$$\varphi_n = C \exp(-\lambda_n \dot{x}), \quad (22)$$

где C — константа.

Будем искать решение, удовлетворяющее последнему условию, которое позволяет утверждать, что при его выполнении ни левая, ни правая части (21) не зависят ни от $\dot{x}$, ни от $\dot{r}$, а равны некой общей константе η :

$$\frac{1}{\varphi_n} \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial \dot{x}^2} = -\frac{1}{\phi_n} \left(\frac{\partial^2 \phi_n}{\partial \dot{r}^2} - \frac{\partial \phi_n}{\partial \dot{r}} + A_n \dot{r} J_1(\lambda_n \dot{r}) \frac{\exp(-\lambda_n \dot{x})}{\varphi_n} \right) = \eta.$$

В результате вновь приходим к задаче Штурма — Лиувилля с системой обыкновенных линейных дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial \dot{x}^2} - \eta \varphi_n &= 0; \\ \frac{\partial^2 \phi_n}{\partial \dot{r}^2} - \frac{\partial \phi_n}{\partial \dot{r}} + \eta \phi_n &= -A_n \dot{r} J_1(\lambda_n \dot{r}) \frac{\exp(-\lambda_n \dot{x})}{\varphi_n}. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Легко видеть, что удовлетворяющее условию (22) решение получается из первого уравнения системы (23), если $\eta = \lambda_n^2$. При этом второе уравнение системы приводится к неоднородному уравнению Бесселя [10]

$$\frac{\partial^2 \phi_n}{\partial \dot{r}^2} - \frac{\partial \phi_n}{\partial \dot{r}} + \lambda_n^2 \phi_n = -B_n \dot{r} J_1(\lambda_n \dot{r}), \quad (24)$$

где B_n — константа, равная $B_n = A_n/C$.

Положим функцию ϕ_n равной

$$\phi_n = \phi_{n1} + \phi_{n2}, \quad (25)$$

что позволяет разложить уравнение (24) на два, одно из которых однородное с решением ϕ_{n1} , а второе — неоднородное с решением ϕ_{n2}

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi_{n1}}{\partial \dot{r}^2} - \frac{\partial \phi_{n1}}{\partial \dot{r}} + \lambda_n^2 \phi_{n1} &= 0; \\ \frac{\partial^2 \phi_{n2}}{\partial \dot{r}^2} - \frac{\partial \phi_{n2}}{\partial \dot{r}} + \lambda_n^2 \phi_{n2} &= -B_n \dot{r} J_1(\lambda_n \dot{r}). \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Решением первого в системе (26) однородного уравнения Бесселя будет

$$\phi_{n1} = D_n \dot{r} J_1(\lambda_n \dot{r}), \quad (27)$$

при этом

$$\frac{\partial \phi_{n1}}{\partial \dot{r}} = D_n \lambda_n \dot{r} J_0(\lambda_n \dot{r}), \quad (28)$$

где D_n — постоянная; $J_0(\lambda_n \dot{r})$ — функция Бесселя 1-го рода 0-го порядка.

Умножим теперь первое уравнение системы (26) на ϕ_{n2} , а второе — на ϕ_{n1} :

$$\left. \begin{aligned} \phi_{n2} \frac{\partial^2 \phi_{n1}}{\partial \dot{r}^2} - \frac{\phi_{n2}}{\dot{r}} \frac{\partial \phi_{n1}}{\partial \dot{r}} + \lambda_n^2 \phi_{n1} \phi_{n2} &= 0; \\ \phi_{n1} \frac{\partial^2 \phi_{n2}}{\partial \dot{r}^2} - \frac{\phi_{n1}}{\dot{r}} \frac{\partial \phi_{n2}}{\partial \dot{r}} + \lambda_n^2 \phi_{n1} \phi_{n2} &= -\phi_{n1} B_n \dot{r} J_1(\lambda_n \dot{r}), \end{aligned} \right\}$$

и вычтем из второго первое:

$$\phi_{n1} \frac{\partial^2 \phi_{n2}}{\partial \dot{r}^2} - \phi_{n2} \frac{\partial^2 \phi_{n1}}{\partial \dot{r}^2} - \frac{1}{\dot{r}} \left(\phi_{n1} \frac{\partial \phi_{n2}}{\partial \dot{r}} - \phi_{n2} \frac{\partial \phi_{n1}}{\partial \dot{r}} \right) = -\phi_{n1} B_n \dot{r} J_1(\lambda_n \dot{r}). \quad (29)$$

Можно видеть, что стоящая в скобках сумма является определителем Вронского или вронскианом

$$\phi_{n1} \frac{\partial \phi_{n2}}{\partial \dot{r}} - \phi_{n2} \frac{\partial \phi_{n1}}{\partial \dot{r}} = \begin{vmatrix} \phi_{n1} & \phi_{n2} \\ \phi'_{n1} & \phi'_{n2} \end{vmatrix} = W,$$

а его производная по $\dot{r}$ равна первым двум слагаемым уравнения (29)

$$\frac{\partial W}{\partial \dot{r}} = \frac{\partial}{\partial \dot{r}} \left(\phi_{n1} \frac{\partial \phi_{n2}}{\partial \dot{r}} - \phi_{n2} \frac{\partial \phi_{n1}}{\partial \dot{r}} \right) = \phi_{n1} \frac{\partial^2 \phi_{n2}}{\partial \dot{r}^2} - \phi_{n2} \frac{\partial^2 \phi_{n1}}{\partial \dot{r}^2}.$$

Тогда уравнение (29) может быть переписано в виде

$$\frac{\partial W}{\partial \dot{r}} - \frac{W}{\dot{r}} = -\phi_{n1} B_n \dot{r} J_1(\lambda_n \dot{r}), \text{ или } \frac{\partial}{\partial \dot{r}} \left(\frac{W}{\dot{r}} \right) = -\phi_{n1} B_n J_1(\lambda_n \dot{r}). \quad (30)$$

Разделяя переменные и подставляя в (30) значение функции ϕ_{n1} из (27), после интегрирования

$$\int d \left(\frac{W}{\dot{r}} \right) = -D_n B_n \int \dot{r} J_1^2(\lambda_n \dot{r}) d\dot{r}$$

находим

$$W = \phi_{n1} \frac{\partial \phi_{n2}}{\partial \dot{r}} - \phi_{n2} \frac{\partial \phi_{n1}}{\partial \dot{r}} = -D_n B_n \frac{\dot{r}^3}{2} \left[J_1^2(\lambda_n \dot{r}) - J_0(\lambda_n \dot{r}) J_2(\lambda_n \dot{r}) \right] + C_n \dot{r},$$

где $J_2(\lambda_n \dot{r})$ — функция Бесселя 1-го рода 2-го порядка; C_n — константа.

Подставим в последнее равенство известные значения функции ϕ_{n1} и ее производной по $\dot{r}$ согласно (27) и (28), а также, используя рекуррентные соотношения, связывающие функции Бесселя [9], выразим функцию Бесселя 1-го рода 2-го порядка через функции Бесселя 1-го рода 0-го и 1-го порядков

$$J_2(\lambda_n \dot{r}) = \frac{2J_1(\lambda_n \dot{r})}{\lambda_n \dot{r}} - J_0(\lambda_n \dot{r}),$$

в результате получим

$$J_1(\lambda_n \dot{r}) \frac{\partial \phi_{n2}}{\partial \dot{r}} - \lambda_n J_0(\lambda_n \dot{r}) \phi_{n2} = - \frac{\dot{r}^2}{2} \left\{ J_1^2(\lambda_n \dot{r}) - J_0(\lambda_n \dot{r}) \left[\frac{2J_1(\lambda_n \dot{r})}{\lambda_n \dot{r}} - J_0(\lambda_n \dot{r}) \right] \right\} + \frac{n}{D_n}. \quad (31)$$

Замечая, что решение этого уравнения может быть получено только при $C_n = 0$ и в его левой и правой частях имеется только одна комбинация соответствия слагаемых, содержащих $J_0(\lambda_n \dot{r})$, а именно

$$-\lambda_n J_0(\lambda_n \dot{r}) \phi_{n2} = - \frac{\dot{r}^2}{2} J_0^2(\lambda_n \dot{r}),$$

находим

$$\phi_{n2} = \frac{B_n}{2\lambda_n} \dot{r}^2 J_0(\lambda_n \dot{r}), \quad (32)$$

при этом

$$\frac{\partial \phi_{n2}}{\partial \dot{r}} = \frac{B_n}{\lambda_n} \dot{r} J_0(\lambda_n \dot{r}) - \frac{B_n}{2} \dot{r}^2 J_1(\lambda_n \dot{r}). \quad (33)$$

Подставляя выражения (32) и (33) в уравнение (31), нетрудно убедиться в том, что оно тождественно выполняется. Выполняется соответственно и неоднородное уравнение Бесселя в системе (26).

Таким образом, согласно (25) имеем

$$\phi_n = \phi_{n1} + \phi_{n2} = D_n \dot{r} J_1(\lambda_n \dot{r}) + \frac{B_n}{2\lambda_n} \dot{r}^2 J_0(\lambda_n \dot{r}),$$

далее

$$\dot{\Psi}_{2n} = \phi_n \dot{\phi}_n = \left[D_n \dot{r} J_1(\lambda_n \dot{r}) + \frac{n}{2\lambda_n} \dot{r}^2 J_0(\lambda_n \dot{r}) \right] \exp(-\lambda_n \dot{x}),$$

и в результате по (19)

$$\dot{\Psi}_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{\Psi}_{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[D_n \dot{r} J_1(\lambda_n \dot{r}) + \frac{B_n}{2\lambda_n} \dot{r}^2 J_0(\lambda_n \dot{r}) \right] C \exp(-\lambda_n \dot{x}).$$

При этом общее решение задачи (15) согласно (16) примет вид

$$\dot{\Psi} = \dot{\Psi}_1 + \dot{\Psi}_2 = \dot{r}^2 \left(1 - \frac{\dot{r}^2}{2} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[D_n \dot{r} J_1(\lambda_n \dot{r}) + \frac{B_n}{2\lambda_n} \dot{r}^2 J_0(\lambda_n \dot{r}) \right] C \exp(-\lambda_n \dot{x}).$$

Но согласно (8) и (14) при $\dot{r} = 1$ имеем $\dot{\Psi} = 0,5$, тогда, следуя полученному распределению, должно выполняться равенство

$$D_n J_1(\lambda_n) + \frac{B_n}{2\lambda_n} J_0(\lambda_n) = 0,$$

откуда

$$\frac{2\lambda_n D_n}{B_n} = - \frac{J_0(\lambda_n)}{J_1(\lambda_n)}.$$

Подставляя полученный результат в найденное распределение функции тока и замечая, что $A_n = B_n C$, окончательно находим

$$\dot{\Psi}(\dot{r}, \dot{x}) = \dot{r}^2 \left(1 - \frac{\dot{r}^2}{2} \right) - \frac{\dot{r}}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\lambda_n} \left[\frac{J_0(\lambda_n)}{J_1(\lambda_n)} J_1(\lambda_n \dot{r}) - \dot{r} J_0(\lambda_n \dot{r}) \right] \exp(-\lambda_n \dot{x}). \quad (34)$$

Полученное решение отвечает поставленным граничным условиям (6) и (8). Остается открытым вопрос о значении константы A_n . Этот вопрос мы рассмотрим в следующей статье, где исследуется распределение аксиальных и радиальных скоростей.

Библиографический список

1. *Van Dyke M.* An Album of Fluid Motion. Stanford. The Parabolic Press. 1982. 184 p.
2. *Giesekes H.* A simple Constitutive Equation for Polymer Fluids Based on the Concept of Deformation Dependent Tensorial Mobility // *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. 1982. Vol. 11. pp. 69—109.
3. *Bird R.B., Armstrong R.C., Hassager O.* Dynamics of Polymeric Liquids. Vol. 1. Fluid Mechanics. 2nd ed. New York. John Wiley and Sons. 1987. 565 p.
4. *Снигирев Б.А., Алиев К.М., Тазюков Ф.Х.* Ползущее течение вязкоупругой жидкости со свободной поверхностью в условиях неизотермичности // *Известия Саратовского университета. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*. 2011. Т. 11. Вып. 3(1). С. 89—94.
5. *Орехов Г.В., Зуйков А.Л., Волишник В.В.* Контрвихревое ползущее течение // *Вестник МГСУ*. 2013. № 4. С. 172—180.
6. Моделирование и расчет контрвихревых течений / В.К. Ахметов, В.В. Волишник, А.Л. Зуйков, Г.В. Орехов ; под ред. А.Л. Зуйкова. М. : МГСУ, 2012. 252 с.
7. *Зуйков А.Л.* Распределение продольных скоростей в циркуляционном течении в трубе // *Вестник МГСУ*. 2009. № 3. С. 200—204.
8. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М. : Наука, 1988. 512 с.
9. *Korn G.A., Korn T.M.* Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems, and Formulas for Reference and Review. New York. General Publishing Company. 2000. 1151 p.
10. *Корнев Б.Г.* Введение в теорию бесселевых функций. М. : Наука, 1971. 288 с.

Поступила в редакцию в январе 2014 г.

Об авторе: **Зуйков Андрей Львович** — доктор технических наук, профессор кафедры гидравлики и водных ресурсов, **Московский государственный строительный университет (ФГБОУ ВПО «МГСУ»)**, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, 8(495) 287-49-14 вн. 14-18, zuykov54@mail.ru.

Для цитирования: *Зуйков А.Л.* Азимутальный вихрь и функция тока в ползущем течении в трубе // *Вестник МГСУ*. 2014. № 4. С. 150—159.

A.L. Zuykov

AZIMUTHAL VORTICITY AND STREAM FUNCTION IN THE CREEPING FLOW IN A PIPE

The article is devoted to the analytical study of the structure of steady non-uniform creeping flow in a cylindrical channel. There are many papers on the hydrodynamics of such flows, mainly related to the production of polymers. Previously we showed that the structure of steady non-uniform creeping flow in a cylindrical tube is determined by the Laplace equation relative to the azimuthal vorticity. The solution of Laplace's equation

regarding the azimuthal vorticity is dedicated to the first half of the article. Fourier expansion allows us to write the azimuthal vortex in the form of two functions, the first of which depends only on the radial coordinate, and the second depends only on the axial coordinate. Fourier expansion can come to the Sturm — Liouville problem with a system of two differential equations, one of which is homogeneous Bessel equation. The radial-axial distribution of the azimuthal vorticity in the creeping flow is obtained on the basis of a rapidly convergent series of Fourier — Bessel. In the next article the radial-axial distribution of the stream function will be discussed. The solution is constructed from the Poisson equation based on the solution for the azimuthal vortex distribution. Fourier expansion can come to the Sturm — Liouville problem with a system of two differential equations, one of which is inhomogeneous Bessel equation. The inhomogeneous Bessel equation is solved through the Wronskian. The distribution of the stream function is obtained in the form of rapidly converging series of Fourier — Bessel.

Key words: creeping flow, azimuthal vorticity, stream function, Laplace equation, Poisson equations, decomposition of Fourier — Bessel.

References

1. Van Dyke M. An Album of Fluid Motion. Stanford, The Parabolic Press, 1982, 184 p.
2. Giesekes H. A Simple Constitutive Equation for Polymer Fluids Based on the Concept of Deformation Dependent Tensorial Mobility. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. 1982, vol. 11, pp. 69—109.
3. Bird R.B., Armstrong R.C., Hassager O. Dynamics of Polymeric Liquids. Vol. 1 Fluid Mechanics. 2nd ed. New York, John Wiley and Sons, 1987, 565 p.
4. Snigirev B.A., Aliev K.M., Tazyukov F.Kh. Polzushchee techenie vyazkouprugoy zhidkosti so svobodnoy poverkhnost'yu v usloviyakh neizotermichnosti [Creeping Flow of Viscoelastic Fluid with a Free Surface in a Non-Isothermal]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta* [Proceedings of the Saratov University]. New. Ser. Mathematics. Mechanics. Informatics. 2011, no. 3 (1), pp. 89—94.
5. Orekhov G.V., Zuykov A.L., Volshanik V.V. Kontrvikhrevoe polzushchee techenie [Creeping Counter Vortex Flow]. *Vestnik MGSU* [Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering]. 2013, no. 4, pp. 172—180.
6. Akhmetov V.K., Volshanik V.V., Zuykov A.L., Orekhov G.V. *Modelirovanie i raschet kontrvikhrevykh techeniy* [Modeling and Calculation of Counter Vortex Flows]. Moscow, Moscow State University of Civil Engineering Publ., 2012, 252 p.
7. Zuykov A.L. Raspredelenie prodol'nykh skorostey v tsirkulyatsionnom techenii [The Distribution of the Longitudinal Velocity in the Circulation Flow in the Pipe]. *Vestnik MGSU* [Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering], 2009, no. 3, pp. 200—204.
8. Vladimirov V.S. *Uravneniya matematicheskoy fiziki i spetsial'nye funktsii* [The Equations of Mathematical Physics and Special Functions]. Moscow, Nauka Publ., 1988, 512 p.
9. Korn G.A., Korn T.M. Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems, and Formulas for Reference and Review. New York, General Publishing Company, 2000, 1151 p.
10. Korenev B.G. *Vvedenie v teoriyu besselevykh funktsiy* [Introduction to the Theory of Bessel Functions]. Moscow, Nauka Publ., 1971, 288 p.

About the author: **Zuykov Andrey L'vovich** — Doctor of Technical Sciences, Professor, Department of Hydraulics and Water Resources, **Moscow State University of Civil Engineering (MGSU)**, 26 Yaroslavskoye shosse, Moscow, 129337, Russian Federation; +7 (495) 287-49-14, ext. 14-18; zuykov54@mail.ru.

For citation: Zuykov A.L. Azimutal'nyy vikhr' i funktsiya toka v polzushchem techenii v trube [Azimuthal Vorticity and Stream Function in the Creeping Flow in a Pipe]. *Vestnik MGSU* [Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering]. 2014, no. 4, pp. 150—159.