ПРОЕКТИРОВАНИЕ И КОНСТРУИРОВАНИЕ СТРОИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ. ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ В СТРОИТЕЛЬСТВЕ

УДК 624.072.1

В.И. Андреев, Б.М. Языев*, А.С. Чепурненко*

*ФГБОУ ВПО «МГСУ», *ФГБОУ ВПО «РГСУ»*

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЙ ИЗГИБ КРУГЛОЙ ГИБКОЙ ПЛАСТИНКИ ПРИ ПОЛЗУЧЕСТИ

Получены разрешающие уравнения для задачи изгиба круглой осесимметрично нагруженной гибкой пластинки при ползучести. Решение свелось к системе из двух нелинейных дифференциальных уравнений. Данная система решена методом последовательных приближений в сочетании с методом конечных разностей. Вычисления проведены в пакете Matlab. В качестве материала был взят полимер ЭДТ-10, для которого справедлив физический закон Максвелла — Гуревича. Выполнено сравнение результатов, получаемых с учетом геометрической нелинейности и без ее учета.

Ключевые слова: полимерная гибкая пластинка, ползучесть, метод конечных разностей, уравнение Максвелла — Гуревича.

Вопросам расчета пластинок при ползучести посвящено достаточно много работ, в т.ч. [1—12]. Но в большинстве работ авторы учитывают только физическую нелинейность, а для пластинок геометрическая нелинейность проявляется даже при небольших прогибах порядка $1/5 \dots 1/4$ толщины [13]. Кроме того, в указанных работах авторы, как правило, ограничиваются определенным уравнением связи деформаций ползучести и напряжений.

Рассмотрим круглую жестко защемленную пластинку, нагруженную равномерно распределенной нагрузкой q (рис. 1).

В качестве уравнения связи между напряжениями и деформациями ползучести будем использовать обобщенное уравнение Максвелла — Гуревича, которое имеет вид [14]

$$\frac{\partial \varepsilon_i^*}{\partial t} = \frac{f_i^*}{\eta^*}, i = (r, \theta),$$

где ε_i^* — деформации ползучести; f_i^* — функции напряжений, определяемые формулой

$$f_i^* = \frac{3}{2}(\sigma_i - p) - E_\infty \varepsilon_i^*,$$

где $p = \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{3}$ — среднее напряжение; E_∞ — модуль высокоэластичности;

Рис. 1. Расчетная схема пластинки

$$\frac{1}{*} = \frac{1}{0} \exp \left(\frac{\left| \frac{f_{\max}^*}{m^*} \right|}{\eta_0} \right), \text{ где } \eta_0 \text{ — начальная релаксационная вязкость; } m^* \text{ — мо-}$$

дуль скорости. Из последних соотношений следует, что скорость деформации зависит от напряжений, что и определяет физическую нелинейность задачи.

При учете ползучести из основных соотношений теории изгиба упругих гибких пластин (уравнения равновесия, геометрические и физические уравнения) изменения претерпевают только физические соотношения. Для осесимметричной задачи они запишутся следующим образом:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_\theta) + \varepsilon_r^*, \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \nu \sigma_r) + \varepsilon_\theta^*. \quad (1)$$

Представим деформации ползучести в произвольной точке пластины с координатами r и z в виде суммы двух составляющих:

$$\varepsilon_i^*(r, z) = \varepsilon_{i, \text{ср}}^*(r) + \varepsilon_{i, \text{изг}}^*(r, z), \quad i = r, \theta,$$

где $\varepsilon_{i, \text{ср}}^*$ — деформации ползучести в срединной поверхности; $\varepsilon_{i, \text{изг}}^*$ — деформации ползучести, обусловленные изменением кривизны пластины.

Напряжения и полные деформации также представим в виде суммы двух составляющих:

$$\varepsilon_i(r, z) = \varepsilon_{i, \text{ср}}(r) + \varepsilon_{i, \text{изг}}(r, z), \quad \sigma_i(r, z) = \sigma_{i, \text{ср}}(r) + \sigma_{i, \text{изг}}(r, z), \quad i = r, \theta.$$

Деформации и напряжения, вызванные изменением кривизны пластины, определяются следующим образом:

$$\varepsilon_{r, \text{изг}} = -z \frac{d^2 w}{dr^2}, \quad \varepsilon_{\theta, \text{изг}} = -\frac{z}{r} \frac{dw}{dr}; \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{r, \text{изг}} &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[\left(\varepsilon_{r, \text{изг}} + \nu \varepsilon_{\theta, \text{изг}} \right) - \left(\varepsilon_{r, \text{ср}}^* + \nu \varepsilon_{\theta, \text{ср}}^* \right) \right]; \\ \sigma_{\theta, \text{изг}} &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[\left(\varepsilon_{\theta, \text{изг}} + \nu \varepsilon_{r, \text{изг}} \right) - \left(\varepsilon_{\theta, \text{ср}}^* + \nu \varepsilon_{r, \text{ср}}^* \right) \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

С учетом (2) и (3) выражения для изгибающих моментов примут вид

$$\begin{aligned} M_r &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{r, \text{изг}} z dz = -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) - M_r^*; \\ M_\theta &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\theta, \text{изг}} z dz = -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) - M_\theta^*, \end{aligned} \quad (4)$$

где h — толщина пластинки; $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ — цилиндрическая жесткость;

$$\begin{aligned} M_r^* &= \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-h/2}^{h/2} (\varepsilon_{r, \text{изг}}^* + \nu \varepsilon_{\theta, \text{изг}}^*) z dz = \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-h/2}^{h/2} (\varepsilon_r^* + \nu \varepsilon_\theta^*) z dz; \\ M_\theta^* &= \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-h/2}^{h/2} (\varepsilon_\theta^* + \nu \varepsilon_r^*) z dz. \end{aligned}$$

Дифференциальное уравнение равновесия пластины имеет вид [8]

$$\frac{dM_r}{dr} + \frac{M_r}{r} - \frac{M_\theta}{r} = -\psi - h\sigma_{r,sp} \frac{dw}{dr}, \quad (5)$$

где $\psi = \frac{1}{r} \int_0^r q r dr$ — функция нагрузки.

После подстановки (4) в (5) получим первое разрешающее уравнение:

$$D \left(\frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right) = + \frac{h}{r} \frac{d\Phi}{dr} \frac{dw}{dr} - \frac{dM^*}{dr} - \frac{M^*}{r} + \frac{M}{r}. \quad (6)$$

Уравнение равновесия, содержащее напряжения в срединной поверхности, записывается в виде [8]

$$\frac{d\sigma_{r,sp}}{dr} + \frac{\sigma_{r,sp} - \sigma_{\theta,sp}}{r} = 0. \quad (7)$$

Это уравнение будет удовлетворено, если ввести функцию напряжений

$$\Phi \text{ по формулам: } \sigma_{r,sp} = \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr}, \quad \sigma_{\theta,sp} = \frac{d^2 \Phi}{dr^2}.$$

Уравнение совместности деформаций в срединной поверхности имеет вид [8]

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) - r \frac{d^2 w}{dr^2} = -\frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2. \quad (8)$$

Выразим деформации срединной поверхности через функцию напряжений:

$$\varepsilon_{r,sp} = \frac{1}{E} \left(\frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} - \nu \frac{d^2 \Phi}{dr^2} \right) + \varepsilon_{r,sp}^*, \quad \varepsilon_{\theta,sp} = \frac{1}{E} \left(\frac{d^2 \Phi}{dr^2} - \frac{\nu}{r} \frac{d\Phi}{dr} \right) + \varepsilon_{\theta,sp}^*. \quad (9)$$

После подстановки (9) в (8) получим второе разрешающее уравнение:

$$\frac{d^3 \Phi}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 \Phi}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{d\Phi}{dr} = -\frac{E}{r} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 + r \frac{d^*}{dr} + \frac{*}{r} - \frac{*}{r} \right). \quad (10)$$

В итоге задача осесимметричного изгиба круглой гибкой пластины при ползучести свелась к системе из двух дифференциальных уравнений (6) и (10).

Рассмотрим методику решения данной системы.

На первом этапе решается упругая задача. Решение выполняется методом последовательных приближений в сочетании с методом конечных разностей. В первом приближении считаем, что пластинка жесткая, т.е. решаем методом сеток уравнение (6), полагая, что $\Phi = 0$. В результате получаем значения прогиба в узловых точках. Далее функцию $w(r)$ численно дифференцируем и подставляем в уравнение (10). Решив это уравнение, получим функцию Φ . Во втором приближении подставляем эту функцию в уравнение (6), и получаем новые значения прогиба в узлах. После этого вычисляем в каждом узле среднее значение между прогибом в данном и предыдущем приближении, и подставляем в уравнение (10). Итерационный процесс продолжается, пока относительная разница между максимальными значениями Φ в предыдущем и последующем приближениях не превышает заданную (0,1 %).

Далее временной интервал, на котором рассматривается процесс ползучести, разбивается на n шагов Δt . После решения упругой задачи по вычисленным напряжениям определяется скорость роста деформаций ползучести $\frac{\partial \varepsilon_{i,j}^*}{\partial t}$, где $i = r, \theta$, а $j = 1, 2, \dots, n$. Деформация $\varepsilon_{i,j+1}^*$ в момент времени t_{j+1} находится с помощью линейной аппроксимации:

$$\varepsilon_{i,j+1}^* = \varepsilon_{i,j}^* + \frac{\partial \varepsilon_{i,j}^*}{\partial t} \Delta t.$$

На каждом шаге сначала решается уравнение (6) со значениями функции Φ , взятыми с предыдущего шага, потом выполняется перерасчет до достижения требуемой точности.

Для проверки правильности работы программы было выполнено сравнение упругой задачи с решением А.С. Вольмира [8]. В этой работе задача решена методом Бубнова — Галеркина с учетом только геометрической нелинейности. Для прогиба А.С. Вольмир выбрал приближенное выражение в виде

$w = f \left(1 - \frac{r^2}{c^2} \right)^2$, отвечающее решению задачи для жесткой пластинки. В результате для случая, когда точки опорного контура могут смещаться свободно, задача свелась к следующей зависимости между нагрузкой и максимальным прогибом:

$$\frac{1}{28} E h f^3 + \frac{8}{3} D f = \frac{q c^4}{24}, \quad (11)$$

где c — радиус пластины.

На рис. 2 приведено сравнение результатов решения упругой задачи авторами и А.С. Вольмиром. Кривая 1 соответствует решению А.С. Вольмира, кривая 2 — решению авторов, прямой линии 3 соответствует результат, получаемый без учета геометрической нелинейности. Из рис. 2, во-первых, видно, что результат, полученный авторами, практически совпадает с решением А.С. Вольмира. Также из графиков видно, что расчет по геометрически линейной теории может давать значения прогибов, завышенные в разы.

Была решена модельная задача для жестко защемленной пластинки из сетчатого полимера ЭДТ-10 при различных значениях нагрузки q . Вычисления выполнялись при следующих исходных данных: $\nu = 0,3$, $E = 3035$ МПа кг/мм², $E_\infty = 2310$ МПа, $m^* = 4,44$ МПа, $\eta_0 = 1,8 \cdot 10^9$ МПа·с [15], размеры: $c = 1$ м, $h = 15$ мм. На рис. 3 показаны графики роста прогиба в центре пластины. Кривым соответствует: 1 — $q = 0,3$ кПа, 2 — $q = 0,5$ кПа, 3 — $q = 1$ кПа. Штриховыми

Рис. 2. Сравнение результатов решения упругой задачи

линиями показаны результаты, полученные по геометрически линейной теории. Из графиков видно, что ползучесть носит затухающий характер.

При $q = 0,3$ кПа максимальные прогибы в конце процесса ползучести, вычисленные без учета геометрической нелинейности и с ее учетом, отличаются на 7,7 %, при $q = 0,5$ кПа — на 20 %, а при $q = 1$ кПа — на 40 %. Отметим, что помимо величины максимального прогиба, при расчете по геометрически нелинейной теории может существенно отличаться время, в течение которого ползучесть затухает.

Рис. 3. Рост прогиба во времени при различных величинах нагрузки

Исследуем процесс ползучести при $t \rightarrow \infty$, считая, что напряжения в срединной поверхности отсутствуют. Так как прогиб при $t \rightarrow \infty$ стремится к конечному значению, то скорости роста высокоэластических деформаций

$$\left. \frac{\partial \varepsilon_i^*}{\partial t} \right|_{t \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \text{ следовательно, равны нулю и функции напряжений } f_i^*:$$

$$f_r^* = r - \frac{r}{2} - E_\infty^* r = 0, \quad f^* = -\frac{r}{2} - E_\infty^* = 0. \quad (12)$$

Выразив из (12) деформации ползучести через напряжения и подставив их в (1), получим:

$$\varepsilon_r = \alpha \sigma_r - \beta \sigma_\theta, \quad \varepsilon_\theta = \alpha \sigma_\theta - \beta \sigma_r, \quad (13)$$

$$\text{где } \alpha = \frac{1}{E} + \frac{1}{E_\infty}, \quad \beta = \frac{\nu}{E} + \frac{1}{2E_\infty}.$$

Выразив из (13) напряжения через деформации и подставив вместо деформаций соотношения (2), получим следующие зависимости для напряжений при $t \rightarrow \infty$:

$$\sigma_r = -\frac{z}{2} \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right), \quad \sigma_\theta = -\frac{z}{2} \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right). \quad (14)$$

Из соотношений (14) можно сделать вывод, что при небольших прогибах напряжения в конце процесса ползучести по толщине пластины изменяются линейно.

Подставив (13) в (4), а затем (4) в (5), считая, что $\sigma_r = 0$, придем к следующему дифференциальному уравнению:

$$D_\infty \left(\frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right) = 0, \quad (15)$$

$$\text{где } D_\infty = \frac{\alpha h^3}{12(\alpha^2 - \beta^2)} \text{ — длительная цилиндрическая жесткость.}$$

Уравнение (15) аналогично уравнению для упругой задачи. Таким образом, чтобы определить прогиб в конце процесса ползучести по геометрически линейной теории, достаточно упругое решение умножить на отношение D/D_∞ . Отметим, что в практике инженерных расчетов для учета ползучести используется длительный модуль упругости, определенный из опытов на одноосное растяжение или сжатие. Для полимеров длительным модулем часто называют модуль высокоэластичности E_∞ . Из формулы для длительной цилиндрической жесткости видно, что D_∞ зависит не только от E_∞ , но и от мгновенного модуля упругости E и коэффициента Пуассона ν . В то же время D_∞ не зависит от начальной релаксационной вязкости и модуля скорости.

На рис. 4 и 5 соответственно показаны графики изменения напряжений σ_r и σ_θ во времени в точке $r = c, z = h/2$ при $q = 1$ кПа. Штриховой линии также соответствует результат с учетом только физической нелинейности. Из графика видно, что в рассматриваемой точке напряжения σ_r в начале и в конце процесса ползучести по геометрически линейной теории совпадают. Нетрудно показать, что при малых прогибах в любой точке по высоте пластины при $r = c$ напряжения σ_r в моменты времени $t = 0$ и $t = \infty$ равны.

Рис. 4. Изменение напряжений σ_r во времени

Рис. 5. Распределение напряжений σ_θ по толщине пластины

Функция прогиба, отвечающая решению задачи для жесткой пластинки, имеет вид

$$w = f \left(1 - \frac{r^2}{c^2} \right)^2, \quad (16)$$

где $f|_{t=0} = \frac{qc^4}{64D}$, $f|_{t=\infty} = \frac{qc^4}{64D_\infty}$.

Дифференцируя (16), получим:

$$\frac{dw}{dr} = -\frac{4f}{c^2} \left(r - \frac{r^3}{c^2} \right), \quad \frac{d^2w}{dr^2} = -\frac{4f}{c^2} \left(1 - \frac{3r^2}{c^2} \right). \quad (17)$$

Далее, подставляя (17) в (3) и (14), получим:

$$r|_{r=c, t=0} = \frac{Ez}{1-\nu} \frac{4f|_{t=0}}{c^2} \left[\left(1 - \frac{3c^2}{c^2} \right) + \left(1 - \frac{c^2}{c^2} \right) \right] = -\frac{8Ez}{c^2(1-\nu)} \frac{qc^4}{64D} = -\frac{3}{2} \frac{qc^2z}{h^3};$$

$$\begin{aligned} r|_{r=c, t=\infty} &= \frac{z}{2} \frac{4f|_{t=\infty}}{c^2} \left[\left(1 - \frac{3c^2}{c^2} \right) + \left(1 - \frac{c^2}{c^2} \right) \right] = \\ &= -\frac{8z}{c^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right)} \frac{qc^4}{64D} = -\frac{3}{2} \frac{qc^2 z}{h^3}. \end{aligned}$$

При больших прогибах, как видно из рис. 4, такой эффект уже не наблюдается, напряжения σ_r по абсолютной величине с течением времени только убывают.

На рис. 5 показано распределение напряжений σ_θ по толщине пластины при $r = c$ в момент времени $t = 2$ ч. Линия 1 соответствует $q = 2$ кПа, 2 — $q = 5$ кПа, 3 — $q = 8$ кПа. Видно, что при больших нагрузках наблюдается нелинейный характер эпюр.

Библиографический список

1. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. М. : Наука, 1966. 752 с.
2. Пластины и оболочки из стеклопластиков / В.Л. Бажанов, И.И. Гольденблат, В.А. Копнов, А.Д. Поспелов, А.М. Синюков. М. : Высш. шк., 1970. 408 с.
3. *Тергулов И.Г.* Изгиб и устойчивость тонких пластин и оболочек при ползучести. М. : Наука, 1969. 206 с.
4. *Качанов Л.М.* Теория ползучести. М. : Физматгиз, 1960. 680 с.
5. *Немировский Ю.В., Янковский А.П.* Равнонапряженное армирование металлокомпозитных пластин при установившейся ползучести // Проблемы прочности и пластичности. 2007. Вып. 69. С. 70—78.
6. *Леллеп Я.* Установившаяся ползучесть круглых и кольцевых пластин, выполненных из разномодульного неупругого материала // Ученые записки Тартуск. ун-та. 1974. № 342. С. 323—333.
7. *Белов А.В., Поливанов А.А., Попов А.Г.* Оценка работоспособности многослойных пластин и оболочек с учетом повреждаемости материалов вследствие ползучести и высокотемпературной водородной коррозии // Современные проблемы науки и образования. 2007. № 4. С. 80—85.
8. *Andreev V.I., Yazyev B.M., Chepurnenko A.S.* On the Bending of a Thin Plate at Nonlinear Creep // Advanced Materials Research. 2014. Vol. 900. Pp. 707—710.
9. Geometrically nonlinear bending of thin-walled shells and plates under creep-damage conditions / H. Altenbach, O. Morachkovsky, K. Naumenko, A. Sychov // Archive of Applied Mechanics. 1997. Vol. 67. No. 5. Pp. 339—352.
10. *Altenbach H., Naumenko K.* Creep bending of thin-walled shells and plates by consideration of finite deflections // Computational mechanics. 1997. No. 19(6). Pp. 490—495.
11. *Altenbach H., Huang C., Naumenko K.* Creep-damage predictions in thin-walled structures by use of isotropic and anisotropic damage models // The Journal of Strain Analysis for Engineering Design. 2002. Vol. 37. No. 3. Pp. 265—275.
12. *Altenbach H., Altenbach J., Naumenko K.* On the prediction of creep damage by bending of thin-walled structures // Mechanics of Time-Dependent Materials. 1997. Vol. 1. No. 2. Pp. 181—193.
13. *Вольмир А.С.* Гибкие пластинки и оболочки. М. : Изд-во техн.-теорет. лит-ры, 1956. 419 с.

14. Рабинович А.Л. Введение в механику армированных полимеров. М. : Наука, 1970. 482 с.
15. Фрейдин А.С., Турусов Р.А. Адгезионная прочность материалов. М., 1976. 238 с.

Поступила в редакцию в феврале 2014 г.

Об авторах: **Андреев Владимир Игоревич** — доктор технических наук, профессор, академик РААСН, заведующий кафедрой сопротивления материалов, **Московский государственный строительный университет (ФГБОУ ВПО «МГСУ»)**, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, 8 (499) 483-55-57, asv@mgsu.ru;

Языев Батыр Меретович — доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой сопротивления материалов, **Ростовский государственный строительный университет (ФГБОУ ВПО «РГСУ»)**, 344022, г. Ростов-на-Дону, ул. Социалистическая, д. 162, 8 (863) 201-91-09, 277588@rambler.ru;

Чепурненко Антон Сергеевич — студент института промышленного и гражданского строительства, **Ростовский государственный строительный университет (ФГБОУ ВПО «РГСУ»)**, 344022, г. Ростов-на-Дону, ул. Социалистическая, д. 162, anton_chepurnenk@mail.ru.

Для цитирования: *Андреев В.И., Языев Б.М., Чепурненко А.С. Осесимметричный изгиб круглой гибкой пластинки при ползучести // Вестник МГСУ. 2014. № 5. С. 16—24.*

V.I. Andreev, B.M. Yazyev, A.S. Chepurnenko

AXISYMMETRIC BENDING OF A ROUND ELASTIC PLATE IN CASE OF CREEP

In the article the problem of bending of circular axially loaded flexible plate during creep was solved. The solution is reduced to a system of two nonlinear differential equations. These equations are suitable for arbitrary dependencies between tensions and creep deformations. The system was solved by the method of successive approximations in conjunction with the finite difference method. Calculations were performed with the help of software package Matlab. We considered round rigidly clamped along the contour plate, which was loaded by the load uniformly distributed over the area. Polymer EDB-10 was taken as a material, which obeys the Maxwell-Gurevich physical law. Creep strains at each point of time were found using linear approximation. In order to verify the correctness of the program, we compared the elastic solution with the result of Professor A. Volmir. He solved this problem by the method of Bubnov-Galerkin only taking into account the geometric nonlinearity. Our results are in good agreement with the solution of A. Volmir.

It is revealed that the calculation excluding geometric nonlinearity gives high values of deflections. The analysis of the equations for $t \rightarrow \infty$ showed that in linear geometric theory stresses across the thickness of the plate at the end of the creep change linearly. Also the formula for long cylindrical rigidity was obtained. This formula allows us to find the deflection at the end of the creep process, if we know the elastic solution. It is shown that long cylindrical rigidity depends not only on the long elastic modulus ν , but also on short elastic modulus ν and Poisson's ratio ν . It was also found out that in case of high loads stress distribution across the thickness is nonlinear.

Key words: polymer elastic plate, creep, finite difference method, the equation of Maxwell-Gurevich.

References

1. Rabotnov Yu.N. *Polzuchest' elementov konstruktsiy* [Creep of Structural Elements]. Moscow, Nauka Publ. 1966, 752 p.
2. Bazhanov V.L., Gol'denblat I.I., Kopnov V.A., Pospelov A.O., Sinyukov A.M. *Plastinki i obolochki iz stekloplastikov* [Plates and Shells of Fiberglass]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1970, 408 p.

3. Teregulov I.G. *Izgib i ustoychivost' tonkikh plastin i obolochek pri polzuchesti* [Bending and Stability of Thin Plates and Shells under Creep]. Moscow, Nauka Publ., 1969, 206 p.
4. Kachanov L.M. *Teoriya polzuchesti* [Creep Theory]. Fizmatgiz, 1960, 680 p.
5. Nemirovskiy Yu.V., Yankovskiy A.P. Ravnopryazhennoye armirovaniye metallo-kompozitnykh plastin pri ustanovivshesya polzuchesti [Equal-stress Reinforcement of Metal Composite Plates at Steady Creep]. *Problemy prochnosti i plastichnosti* [Problems of Strength and Plasticity]. 2007, vol. 69, pp. 70—78.
6. Lel'ep Ya. Ustanovivshayasya polzuchest' kruglykh i kol'tsevykh plastin, vypolnennykh iz raznomodul'nogo neuprugogo materiala [Steady Creep of Round and Circular Plates Made of Inelastic Multimodulus Material]. *Uchenye zapiski Tartuskogo universiteta* [Teaching Notes of Tartu University]. 1974, no. 342, pp. 323—333.
7. Belov A.V., Polivanov A.A., Popov A.G. Otsenka rabotosposobnosti mnogosloynnykh plastin i obolochek s uchedom povrezhdayemosti materialov vsledstviye polzuchesti i vysokotemperaturnoy vodorodnoy korrozii [Assessment of Performance of Multi-layer Wafers and Shells Based on Damage of Materials due to Creep and High-temperature Hydrogen Corrosion]. *Sovremennyye problemy nauki i obrazovaniya* [Contemporary Problems of Science and Education]. 2007, no. 4, pp. 80—85.
8. Andreev V.I., Yazyev B.M., Chepurnenko A.S. On the Bending of a Thin Plate at Non-linear Creep. *Advanced Materials Research*. 2014, vol. 900, pp. 707—710. Trans Tech Publications, Switzerland.
9. Altenbach H., Morachkovsky O., Naumenko K., Sychov A. Geometrically Nonlinear Bending of Thin-walled Shells and Plates under Creep-damage Conditions. *Archive of Applied Mechanics*. 1997, vol. 67, no. 5, pp. 339—352. DOI: 10.1007/s004190050122.
10. Altenbach H., Naumenko K. Creep Bending of Thin-walled Shells and Plates by Consideration of Finite Deflections. *Computational Mechanics*. 1997, no. 19(6), pp. 490—495. DOI: 10.1007/s004660050197.
11. Altenbach H., Huang C., Naumenko K. Creep-damage Predictions in Thin-walled Structures by Use of isotropic and Anisotropic Damage Models. *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*. 2002, vol. 37, no. 3, pp. 265—275. DOI: 10.1243/0309324021515023.
12. Altenbach H., Altenbach J., Naumenko K. On the Prediction of Creep Damage by Bending of Thin-walled Structures. *Mechanics of Time-Dependent Materials*. 1997, vol. 1, no. 2, pp. 181—193. DOI: 10.1023/A:1009794001209.
13. Vol'mir A.S. *Gibkiye plastinki i obolochki*. [Flexible plates and shells]. Moscow, Publishing House of Technical and theoretical literature, 1956, 419 p.
14. Rabinovich A.L. *Vvedeniye v mekhaniku armirovannykh polimerov* [Introduction of Reinforced Polymers into Mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1970, 482 p.
15. Freydin A.S., Turusov R.A. *Adgessionnaya prochnost' materialov* [The Adhesion Strength of Materials]. Moscow, 1976, 238 p.

About the authors: **Andreev Vladimir Igorevich** — Doctor of Technical Sciences, Professor, member of academy, Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, chair, Department of Strength of Materials, **Moscow State University of Civil Engineering (MGSU)**, 26 Yaroslavskoe shosse, Moscow, 129337, Russian Federation; +7 (499) 483-55-57; asv@mgsu.ru;

Yazyev Batyr Meretovich — Doctor of Technical Sciences, Professor, chair, Department of Strength of Materials, **Rostov State University of Civil Engineering (RSUCE)**, 162 Sotsialisticheskaya str., Rostov-on-Don, 344022, Russian Federation; +7 (863) 201-91-09; 277588@rambler.ru;

Chepurnenko Anton Sergeevich — student, Institute of Industrial and Civil Engineering, **Rostov State University of Civil Engineering (RSUCE)**, 162 Sotsialisticheskaya, Rostov-on-Don, 344022, Russian Federation; anton_chepurnenk@mail.ru.

For citation: Andreev V.I., Yazyev B.M., Chepurnenko A.S. Osesimmetrichnyy izgib krugloy gibkoy plastinki pri polzuchesti [Axisymmetric Bending of a Round Elastic Plate in Case of Creep]. *Vestnik MGSU* [Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering]. 2014, no. 5, pp. 16—24.