УДК 517.3

Л.И. Кузьмина, Ю.В. Осипов*
*НИУ ВШЭ, *ФГБОУ ВПО
«МГСУ»*

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ИНТЕГРАЛА С ДВУМЯ ПАРАМЕТРАМИ

Рассмотрена задача преследования на плоскости двух точек при движении с постоянными скоростями. Например, крановая стрела догоняет груз, движущийся прямолинейно. В системе координат, связанной с преследователем, длина траектории цели задается интегралом, зависящим от отношения скоростей и начального угла между ними. Сформулирована и доказана теорема об асимптотике интеграла для нахождения длины кривой преследования в предположении, что скорость преследователя намного больше скорости цели.

Ключевые слова: асимптотика, интеграл, малый параметр, задача преследования.

Рассмотрим классическую задачу преследования на плоскости [1, 2]. Две материальные точки движутся на плоскости с постоянными скоростями. Одна точка движется по прямой, а вектор скорости второй точки поворачивается и всегда направлен на первую. Такая простая стратегия движения двух точек, не предусматривающая анализа пройденной траектории и соответствующих изменений направления движения, достаточно часто встречается в приложениях. Старинные версии этой задачи [3, 4] используют термины «волк» и «заяц». Заяц бежит по прямой, а волк бросается за ним, постоянно смотря на зайца и двигаясь прямо на него. Заяц сме-

L.I. Kuzmina, Yu.V. Osipov

ASYMPTOTIC EXPANSION OF THE INTEGRAL WITH TWO PARAMETERS

In our work we study a classic pursuit problem in which two material points — a Pursuer and a Pursued — move in a plane at constant velocities. The velocity vector of the Pursued does not change its direction and the velocity vector of the Pursuer turns and always aims at the Pursued. If the Pursuer moves at a higher speed, it will overtake the Pursued for any initial angle between velocity vectors. For example, a crane system simultaneously producing three movements: rotation, extension/retraction and luffing, may seize the cargo moving in a straight line while the crane is standing motionless. In the coordinate system of the Pursuer, the path length of the Pursued is given by an integral, depending on two parameters: the ratio of the initial velocities of two points and the initial angle between them. The theorem on the asymptotic integral expansion is formulated and proved considering the speed of the Pursuer is much greater than the speed of the Pursued. The first two nonzero terms of the asymptotic expansion provide fast convergence to the exact value of the integral because of the absence of the first- and the third-order asymptotic elements. The third nonzero element of the fifth order allows to determine the difference of path lengths corresponding to the adjacent initial angles between the velocities of the points.

Key words: asymptotics, integral, small parameter, pursuit problem.

Consider the classical pursuit problem on the plane [1, 2]. Two material points move on a plane with constant velocities. One point moves in a straight line, and the velocity vector of the second point turns and always aimed at the first one. Such a simple strategy for the movement of the two points that does

щается в сторону от направления движения волка, и волк все время разворачивается, продолжая преследование с постоянной скоростью. Один из современных вариантов задачи — ракета с инфракрасной самонаводящейся головкой перехватывает летящую воздушную цель. Мишень летит по прямой, а ракета постоянно меняет курс, двигаясь по направлению к цели.

Траектория движения преследователя называется кривой преследования [5]. Более сложные стратегии, когда цель движется по кривой с переменной скоростью, а преследователь анализирует ее движение и направляется к расчетной точке встречи, описаны в [6, 7]. Трехмерная задача преследования рассматривается в [8].

Одно из возможных приложений данной задачи — сложное составное движение механической системы. Например, современная крановая система может одновременно производить три движения: поворот, выдвижение или втягивание телескопической стрелы и подъем или опускание стрелы (изменение вылета крановой стрелы). Это позволяет неподвижно стоящему крану захватить груз, движущийся равномерно по прямой. Кран выдвигает телескопическую стрелу при одновременном уменьшении угла наклона стрелы так, чтобы скорость оголовка стрелы была постоянна и направлена горизонтально. При этом стрела разворачивается вслед за движущимся грузом. Если скорость стрелы больше скорости груза, грузозахватный механизм на оголовке стрелы догоняет груз и захватывает его. В [9] показано, что при указанной стратегии преследования захват груза всегда происходит сзади для любого начального угла между направлениями движения груза и стрелы.

not provide analysis of the passed path, and the corresponding changes of direction, is often found in applications. The old version of this problem [3, 4] use the terms "the wolf and the hare". Hare runs in a straight line, and the wolf catches him, constantly looking at the hare and moving directly at him. Hare is shifting from the direction of the wolf, and the wolf is turning all the time, continuing pursuit at a constant speed. One of the current variants of the problem — an infrared missile intercepts an air target. The target is flying in a straight line, but the rocket is constantly changing course, moving toward the goal.

The path length of the Pursuer is a pursuit curve [5]. [6, 7] describe more complex strategies when the target moves along the curve with variable velocity, and the Pursuer analyzes its movement and moves to the expected point of contact. Three-dimensional pursuit problem is considered in [8].

One possible application of this problem is a compound composite motion of the mechanical system. For example, modern crane system can simultaneously produce three movements: rotate, extension or retraction of the crane boom and raising or lowering the crane boom (luffing). That allows the fixed crane to catch the cargo moving in a straight line. Crane extends crane boom with simultaneous reduction of the boom elevation so that the boom head velocity is constant and directed horizontally. At that, the boom turns to follow the movement of cargo. If the velocity of the boom arrows exceeds the velocity of the cargo, the lifting mechanism catches up with the cargo and seizes it. [9] shows that under such pursuit strategy, the cargo is always engaged from the back for any initial angle between the directions of cargo and boom.

Пусть начальный угол между векторами скоростей точек A и B равен α ($0 < \alpha < \pi$), а при $t = 0$ первоначальное расстояние между двумя точками $R = 1$ (рис.).

Let the initial angle between the velocities vectors of points A and B are equal ($0 < \alpha < \pi$), and at $t = 0$ the initial distance between two points $R = 1$.

Преследование в направлении движущейся цели

The pursuing in the direction of a moving target

При выбранной стратегии преследования A догонит B , если точка A движется быстрее: $v > u$. В этом случае длина траектории и время движения конечны. Использование физических соображений позволяет составить и решить уравнения движения точки A [2, 10], в [11] вычисляется длина кривой преследования по отношению к неподвижному наблюдателю.

Мы будем рассматривать траекторию движения точки B относительно A . При переходе к системе отсчета, связанной с догоняющей точкой A , форма и длина траектории меняются. Длина кривой преследования выражается интегралом [12]

In the chosen pursuit strategy A will catch up with B if point A is moving faster: $v > u$. In this case, the path length and time of moving are finitesimal. From the physical point of view it is possible to formulate and solve the motion equation of point A [2, 10], in [11] the length of the pursuit curve referred to a stationary observer was calculated.

We will consider the path length of point B referred to A . In the transition to the frame of reference associated with the pursuing point A , the form and length of the path change. The length of the pursuit curve is expressed by integral [12]

$$L = \frac{\lambda \sin \alpha}{\left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right)^{\lambda}} \int_0^{\alpha} \frac{\left(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}\right)^{\lambda}}{\sin^2 \varphi} \sqrt{1 - 2 \frac{\cos \varphi}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2}} d\varphi, \quad (1)$$

зависящим от двух параметров: начального угла α и отношения скорости догоняющего к скорости убегающего

depending on two parameters: the initial angle and the ratio of the speed of the Pursuer to the speed of the Pursued.

$$\lambda = \frac{v}{u} > 1.$$

В [12, 13] вычислялась асимптотика интеграла (1) при $\lambda \rightarrow \infty$ с точностью соответственно $O(\lambda^{-3})$ и $O(\lambda^{-5})$. Найденные асимптотические разло-

In [12, 13], we calculated the asymptotics of integral (1) $\lambda \rightarrow \infty$ accurate to $O(\lambda^{-3})$ and $O(\lambda^{-5})$ respectively. The determined asymptotic expan-

жения позволили сделать ряд важных выводов о свойствах интеграла (1) и его зависимости от начального угла α . Однако нерешенным остался вопрос о сравнении длин траекторий преследования для смежных начальных углов. Графики таких траекторий существенно различаются [9, 12], но формулы для длины траектории совпадают с точностью $O(\lambda^{-5})$. Ниже показано, что различие длин траекторий, отвечающих смежным углам α и $\pi - \alpha$, определяется членом асимптотики порядка λ^{-5} . Справедлива теорема.

Теорема. В области $\{0 < \alpha < \pi, \lambda \geq \lambda_0 > 1\}$ имеет место представление

$$L = 1 + \frac{\sin^2}{2^2} + \frac{\sin^2}{8^4} (4 - 5 \sin^2) + \frac{\sin^4 \cos}{5} + O(\lambda^{-6}). \quad (2)$$

Для доказательства теоремы методом [14, 15] рассмотрим вспомогательные интегралы

$$L_n = \frac{\lambda \sin \alpha}{\left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right)^\lambda} \int_0^\alpha \frac{\left(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}\right)^\lambda}{\sin^2 \varphi} \cos^n \varphi d\varphi, \quad n = 0 \dots 5. \quad (3)$$

При $n = 0$ и $n = 1$ интегралы (3) равны

$$L_0 = \left(\frac{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{+1} + \frac{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{-1} \right); \quad L_1 = \left(\frac{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{-1} - \frac{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{+1} \right).$$

При $n > 1$ интегрированием по частям получаем оценки:

$$\begin{aligned} L_2 &= \frac{\lambda}{\lambda-1} \cos^2 \alpha + \frac{2\lambda}{\lambda^2-1} \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) \cos \alpha \left(1 + 2 \cos^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right) + \\ &+ \frac{2}{(\lambda^2-1)(\lambda+3)} \sin^4 \alpha + \frac{12}{(\lambda^2-1)(\lambda+3)(\lambda+5)} \sin^4 \alpha \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) + O(\lambda^{-4}); \\ L_3 &= \frac{\lambda}{\lambda-1} \cos^3 \alpha + \frac{2\lambda}{\lambda^2-1} \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) \cos^2 \alpha \left(1 + 4 \cos^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right) + \\ &+ \frac{6\lambda}{(\lambda^2-1)(\lambda+3)} \sin^4 \alpha \cos \alpha + O(\lambda^{-3}); \end{aligned}$$

sions allowed to make a number of important conclusions about the integral properties (1) and its dependence on the initial angle. However, the problem of comparing pursuit curves for the adjacent initial angles remains unsolved. Graphics paths differ significantly in [9, 12], but the formulas for path length are identical $O(\lambda^{-5})$. As follows the difference of path lengths that meet adjacent angles α and $\pi - \alpha$ is determined by asymptotic element of the λ^{-5} order. The theorem is correct.

The theorem. In the field $\{0 < \alpha < \pi, \lambda \geq \lambda_0 > 1\}$ there is representation

To establish the theorem by method [14, 15] consider the auxiliary integrals

For $n = 0$ and $n = 1$ integrals (3) are

If $n > 1$, by integrating by parts we get estimates

$$L_4 = \frac{\lambda}{\lambda-1} \cos^4 \alpha + \frac{2\lambda}{\lambda^2-1} \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) \cos^3 \alpha \left(1 + 6 \cos^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right) + O(\lambda^{-2});$$

$$L_5 = \frac{1}{-1} \cos^5 \alpha + O(\lambda^{-1}).$$

Лемма 1. Интеграл (1) можно представить в виде линейной комбинации интегралов (3):

Lemma 1. Integral (1) can be represented as linear integral combination (3):

$$L = L_0 - \frac{L_1}{2} + \frac{L_0 - L_2}{2^2} + \frac{L_1 - L_3}{2^3} - \frac{L_0 - 6L_2 + 5L_4}{8^4} - \frac{3L_1 - 10L_3 + 7L_5}{8^5} + O(\lambda^{-6}). \quad (4)$$

Лемма 1 следует из разложения подынтегральной функции

Lemma 1 follows from the expansion of the subintegral function

$$\sqrt{1 - 2 \frac{\cos \varphi}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2}}$$

по степеням малого параметра λ^{-1} .

in powers of the small parameter

Разложим интегралы L_n в ряды по степеням λ^{-1} до порядка $O(\lambda^{n-6})$, $n = 0 \dots 5$, и подставим в (4). Теорема доказана.

Expand integrals L_n in a series in powers to order L_n in a series in powers of λ^{-1} to order $O(\lambda^{n-6})$, $n = 0 \dots 5$, and substitute in (4). The theorem is established.

Асимптотическое разложение (2) быстро сходится к точному значению интеграла для длины траектории [9]. Последний член асимптотики (2) порядка λ^{-5} , содержащий множитель $\cos \alpha$, меняет знак при замене угла α на $\pi - \alpha$. Это обеспечивает различие длин траекторий, отвечающих смежным начальным углам между скоростями.

Asymptotic expansion (2) quickly converges to the exact value of the integral for the path length [9]. The last asymptotic element (2) of λ^{-5} order containing multiplier $\cos \alpha$ changes sign when replacing the angle α on $\pi - \alpha$. This makes the difference between path lengths that meet the adjacent initial angles between velocities.

Авторы признательны В.Е. Назайкинскому (Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН) за ценные замечания.

The authors are grateful to V.E. Nazaykinskiy (Institute for Problems in Mechanics named after A.Yu. Ishlinskiy RAS) for valuable comments.

Библиографический список

1. Nahin Paul J. Chases and Escapes: The Mathematics of Pursuit and Evasion. Princeton University Press, 2007. 270 p.
2. Mungan C.E. A classic chase problem solved from a physics perspective // European Journal of Physics. 2005. Vol. 26. Pp. 985—990.

References

1. Nahin Paul J. Chases and Escapes: The Mathematics of Pursuit and Evasion. Princeton University Press, 2007, 270 pp.
2. Mungan C.E. A Classic Chase Problem Solved from a Physics Perspective. European Journal of Physics. 2005, vol. 26, pp. 985—990.

3. Simoson A.J. Pursuit Curves for the Man in the Moone // The College Mathematics Journal. Washington. 2007. Vol. 38. No. 5. Pp. 330—338.

4. Рухтеев Б.Б. Дифференциальные игры с простым движением. Ташкент : Фан, 1989. 232 с.

5. Bernhart A. Curves of Pursuit // Scripta Mathematica. 1954. Vol. 20. Pp. 125—141.

6. Красовский Н.Н. Игровые задачи о встрече движений. М. : Наука, 1970. 420 с.

7. Азамов А.А., Кучкаров А.Ш., Саматов Б.О. О связи между задачами преследования, управляемости и устойчивости в целом в линейных системах с разнотипными ограничениями // Прикладная математика и механика. 2007. Т. 71. Вып. 2. С. 259—263.

8. Barton J.C., Eliezer C.J. On Pursuit Curves // The Journal of the Australian Mathematical Society. ser. B41. 2000. Pp. 358—371.

9. Кузьмина Л.И., Осипов Ю.В. Расчет длины траектории для задачи преследования // Вестник МГСУ. 2013. № 12. С. 20—26.

10. Сигаладзе З.К., Чащина О.И. Задача преследования зайца волком как упражнение элементарной кинематики // Вестник НГУ. Серия Физика. 2010. Т. 5. Вып. 2. С. 111—115.

11. Silagadze Z.K., Tarantsev G.I. Comment on 'Note on the dog-and-rabbit chase problem in introductory kinematics' // European Journal of Physics. 2010. Vol. 31. Pp. 37—38.

12. Kuzmina L.I., Osipov Yu.V. Calculation of the pursuit curve length // Journal for Computational Civil and Structural Engineering. Moscow: ASV Publ. 2013. Vol. 9. No. 3. Pp. 31—39.

13. Кузьмина Л.И., Осипов Ю.В. Асимптотика длины траектории в задаче преследования // Вопросы прикладной математики и вычислительной механики. 2013. № 16. С. 238—249.

14. Маслов В.П. Асимптотические методы и теория возмущений. М. : Наука, 1988. 310 с.

3. Simoson A.J. Pursuit Curves for the Man in the Moone. The College Mathematics Journal. Washington, 2007, vol. 38, no. 5, pp. 330—338.

4. Rikhsiev B.B. *Differentsial'nye igrы s prostym dvizheniem* [Differential Games with Simple Motion]. Tashkent, Fan Publ., 1989, 232 p.

5. Bernhart A. Curves of Pursuit. Scripta Mathematica. 1954, vol. 20, pp. 125—141.

6. Krasovskiy N.N. *Igrovye zadachi o vstreche dvizheniy* [Game Problems on the Meeting of Movements], Moscow, Nauka Publ., 1970, 420 p.

7. Azamov A.A., Kuchkarov A.Sh., Samatov B.O. O svyazi mezhdu zadachami presledovaniya, upravlyaemosti i ustoychivosti v tselom v lineynykh sistemakh s raznotipnymi ogranicheniyami [The Relation between the Chase, Controllability and Overall Stability Problems in Linear Systems with Heterogeneous Constraints]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics]. 2007, vol. 71, no. 2, pp. 259—263.

8. Barton J.C., Eliezer C.J. On Pursuit Curves. The Journal of the Australian Mathematical Society. Ser. B41, 2000, pp. 358—371.

9. Kuz'mina L.I., Osipov Yu.V. Raschet dliny traektorii dlya zadachi presledovaniya [Path Length Calculation in the Pursuit Problem]. *Vestnik MGSU* [Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering]. 2013, no. 12, pp. 20—26.

10. Silagadze Z.K., Chashchina O.I. Zadacha presledovaniya zaytsa volkom kak uprazhnenie elementarnoy kinematiki [The Dog-and-rabbit Pursuit Problem as an Exercise in Introductory Kinematics]. *Vestnik NGU, Seriya Fizika* [Bulletin of Novosibirsk State University, Issue Physics]. 2010, vol. 5, no. 2, pp. 111—115.

11. Silagadze Z.K., Tarantsev G.I. Comment on 'Note on the Dog-and-rabbit Chase Problem in Introductory Kinematics'. European Journal of Physics. 2010, vol. 31, pp. 37—38.

12. Kuzmina L.I., Osipov Yu.V. Calculation of the Pursuit Curve Length. Journal for Computational Civil and Structural Engineering. Moscow, ASV Publ., 2013, vol. 9, no. 3, pp. 31—39.

15. Olver F. Introduction to Asymptotics and Special Functions. New York: Academic Press, 1974. 375 p.

Поступила в редакцию в июне 2014 г.

Об авторах: **Кузьмина Людмила Ивановна** — кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики Московского института электроники и математики, **Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ)**, 101000, г. Москва, ул. Мясницкая, д. 20, lkuzmina@hse.ru;

Осипов Юрий Викторович — кандидат физико-математических наук, профессор, профессор кафедры информатики и прикладной математики, **Московский государственный строительный университет (ФГБОУ ВПО «МГСУ»)**, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, yuri-osipov@mail.ru.

Для цитирования: Кузьмина Л.И., Осипов Ю.В. Асимптотическое разложение интеграла с двумя параметрами // Вестник МГСУ. 2014. № 7. С. 34—40.

13. Kuz'mina L.I., Osipov Yu.V. Asimptotika dliny traektorii v zadache presledovaniya [Path Length Asymptotics in the Pursuit Problem]. Voprosy prikladnoy matematiki i vychislitel'noy mekhaniki [Problems of Applied Mathematics and Computational Mechanics]. Moscow, MGSU Publ., 2013, vol. 16, pp. 238—249.

14. Maslov V.P. Asimptoticheskie metody i teoriya vozmushcheniy [Asymptotic Methods and Perturbation Theory]. Moscow, Nauka Publ., 1988, 310 p.

15. Olver F. Introduction to Asymptotics and Special Functions. New York, Academic Press, 1974, 375 p.

About the authors: **Kuzmina Lyudmila Ivanovna** — Candidate of Physico-Mathematical Sciences, Professor Assistant, Department of Higher Mathematics of Moscow Institute of Electronics and Mathematics, **National Research Institute “Higher School of Economics”**, 20 ulitsa Myasnitskaya, Moscow, 101000, Russian Federation, lkuzmina@hse.ru;

Osipov Yuriy Viktorovich — Candidate of Physico-Mathematical Sciences, Professor, Department of Information Sciences and Applied Mathematics, **Moscow State University of Civil Engineering (MGSU)**, 26 Yaroslavskoe shosse, Moscow, 129337, Russian Federation, yuri-osipov@mail.ru.

For citation: Kuzmina L.I., Osipov Yu.V. Asimptoticheskoe razlozhenie integrala s dvumya parametrami [Asymptotic Expansion of the Integral with Two Parameters]. Vestnik MGSU [Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering]. 2014, no. 7, pp. 34—40.