ПРОЕКТИРОВАНИЕ И КОНСТРУИРОВАНИЕ СТРОИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ. ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ В СТРОИТЕЛЬСТВЕ

УДК 624.04:519.6

А.В. Игнатьев

ФГБОУ ВПО «ВолгГАСУ»

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛИРОВКИ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ЗАДАЧАХ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ Часть 3

Предложена классификация формулировок метода конечных элементов (МКЭ), позволяющая ориентироваться в огромном количестве опубликованных и продолжающих публиковаться работ по проблеме повышения эффективности этого самого распространенного численного метода. В третьей части статьи рассмотрены вариационные формулировки МКЭ и лежащие в их основе энергетические принципы.

Ключевые слова: метод конечных элементов, классификация формулировок, численный метод, вариационные формулировки.

Вариационные формулировки метода конечных элементов (МКЭ). В предшествующем изложении формулировка МКЭ дана в форме алгебраических (для стержневых систем) [1] или дифференциальных (для континуальных систем) [2] уравнений и соответствующих условий на границе или контуре. Задачи построения матриц жесткости, податливости, откликов для отдельного КЭ и получения разрешающих уравнений для всех конструкций могут решаться и в вариационной формулировке.

В отличие от прямого метода, который применяется только к КЭ простого геометрического вида, вариационные формулировки МКЭ применимы к элементам любого вида.

Все вариационные методы условно могут быть подразделены на две группы.

Методы первой группы основаны на принципе стационарности функционала энергии — потенциальной энергии системы, дополнительной энергии или на базе этих энергий, т.е. полной энергии (функционалы Хеллингера — Рейсснера, Ху — Васидзу).

Методы второй группы основаны на вариантах математических методов взвешенных невязок (методы резидуума) для решения дифференциальных уравнений (метод Рунге, метод Бундмана — Галеркина, метод ортогонализации, метод коллокаций и т.д.), которым в некоторых случаях можно дать трактовку с позиций принципа возможных перемещений или экстремальных энергетических принципов.

Самым распространенным и универсальным является подход, основанный на использовании энергетических принципов, вытекающих из закона сохранения

ния энергии: принцип возможных перемещений, принцип возможных изменений напряженного состояния, принцип возможного изменения напряженно-деформированного состояния.

Двум первым принципам соответствуют два основных принципа механики сплошной среды — принцип минимума потенциальной энергии или принцип Лагранжа и принцип минимума дополнительной энергии или принцип Кастильяно.

Третьему принципу соответствуют гибридные и смешанные принципы Рейсснера, Ху — Васидзу, Германа и др.

Принцип возможных перемещений. Вариационный принцип Лагранжа (принцип минимума потенциальной энергии). Функционал Лагранжа. Из закона сохранения механической энергии вытекает принцип возможных перемещений, который формулируется так: если система находится в состоянии равновесия, то сумма возможных работ всех внешних и внутренних сил на всяком возможном бесконечно малом изменении перемещений равна нулю.

В соответствии с формулировкой можно записать:

$$\delta A + \delta W = 0, \quad (1)$$

где A — работа внешних сил; W — работа внутренних сил.

Приращение работы внутренних сил всегда равно приращению потенциальной энергии деформации системы с обратным знаком $\delta W = -\delta U$. С учетом этого выражения (1) можно записать также в виде

$$\delta A - \delta U = 0. \quad (2)$$

Принцип возможных перемещений является наиболее общим началом статики. Из него, как следствие, можно получить уравнения равновесия и граничные условия на поверхности тела, называемые в теории упругости естественными граничными условиями.

Полная потенциальная энергия упругой системы равна сумме работ, которые совершают силы системы, как внешние, так и внутренние при переводе ее из деформированного состояния в начальное недеформированное состояние [3]:

$$\Pi = U + T, \quad (3)$$

где U — потенциальная энергия внутренних сил (полная потенциальная энергия деформации системы); T — потенциальная энергия внешних сил — всегда отрицательна и определяется, как сумма полных величин произведений сил на соответствующих им перемещениях.

Выражение (3), с помощью которого полная потенциальная энергия системы записывается как функция перемещений, вместе с геометрическими и контурными условиями представляет функционал Лагранжа.

Из принципа возможных перемещений следует положение о стационарном значении функционала полной потенциальной энергии системы

$$\delta \Pi = \delta U + \delta T = 0. \quad (4)$$

Другими словами, из всех возможных состояний равновесия системы, подверженной воздействию внешних сил (имеющих потенциал), в действительности имеет место то, при котором полная энергия системы принимает стационарное значение. Этот вариационный принцип носит имя Лагранжа и является наиболее общим принципом статики.

Если в выражение (4) подставить значения первой вариации

$$\delta U = \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial \Delta_i} \delta \Delta_i, \quad \delta T = \sum_{i=1}^n P_i \delta \Delta_i, \quad (5)$$

то получим

$$\sum_{i=1}^n P_i \delta \Delta_i - \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial \Delta_i} \delta \Delta_i = 0. \quad (6)$$

Отсюда, в силу произвольности и кинематической допустимости величины $\delta \Delta_i$, будем иметь

$$P_i - \frac{\partial U}{\partial \Delta_i} = 0 \quad \text{или} \quad P_i = \frac{\partial U}{\partial \Delta_i}, \quad (7)$$

т.е. частная производная от потенциальной энергии деформации системы по обобщенному перемещению равна соответствующей ему обобщенной силе. Сформулированное положение представляет собой теорему Лагранжа, которая, как и сам принцип возможных перемещений, справедлива для любой (линейно или нелинейно) деформируемой системы.

Коэффициенты при неизвестных Δ_i в системе уравнений (7) являются элементами матрицы жесткости и вектора узловых силовых воздействий для КЭ.

Так как квадратичная форма из обобщенных кинематических неизвестных в функционале (3), записанном в матричном виде, является положительно определенной, то функционал Π имеет минимум.

Это означает, что аппроксимирующее поле перемещений для КЭ, удовлетворяющее его геометрическим контурным условиям, и для которого потенциальная энергия КЭ имеет минимум, является действительным и ему соответствует поле напряжений (усилий) отвечающее условиям равновесия.

Отсюда следует вывод, что при приближенной аппроксимации поля перемещений соответствующая потенциальная энергия будет больше действительной.

Принцип возможных изменений напряженного состояния (изменения сил). Вариационный принцип Кастильяно. Функционал Кастильяно. Это принцип, обратный по отношению к принципу возможных перемещений, формулируется следующим образом: если деформации системы согласованы со всеми имеющимися внутренними и внешними связями, т.е. соблюдена совместность деформаций системы, то сумма возможных работ, производимых возможными бесконечно малыми изменениями всех внешних и внутренних сил на действительных перемещениях системы (вызванных статически действующими силами), равна нулю.

Возможными считаются при этом такие изменения внешних и внутренних сил, которые удовлетворяют всем условиям равновесия, т.е. являются статически допустимыми вариациями.

Не теряя общности рассуждений, рассмотрим некоторую стержневую систему, находящуюся в равновесном состоянии I под действием обобщенных внешних сил $P_i (i = 1, 2, \dots, n)$. Соответствующие этим силам обобщенные перемещения обозначим Δ_i , а внутренние усилия в элементах этой системы — M_i, N_i, Q_i .

Рассмотрим теперь бесконечно малую возможную вариацию внешних сил δP_i . Под действием этих дополнительных сил в элементах системы возникают

соответствующие приращения внутренних сил: δM_i , δN_i , δQ_i . Равновесное состояние системы под действием дополнительных сил назовем состоянием II. Так как состояния I и II являются равновесными, то, применяя к ним принцип возможных перемещений и принимая состояние II за действительное, а состояние I за возможное, получим

$$\sum_{i=1}^n \delta P_i \Delta_i - \left[\sum_{i=1}^n \int_0^{\Delta_i} \frac{\delta M_i M_i ds}{EI_i} + \sum_{i=1}^n \int_0^{\Delta_i} \frac{\delta N_i N_i ds}{EF_i} + \sum_{i=1}^n \int_0^{\Delta_i} \frac{\mu \delta Q_i Q_i ds}{GF_i} \right] = 0,$$

или

$$\sum_{i=1}^n \delta P_i \Delta_i - \delta U' = 0. \quad (8)$$

Равенство (8) представляет собой аналитическое выражение принципа возможных изменений напряженного состояния (изменений сил).

Для того чтобы пояснить физическую сущность функционала U' , рассмотрим нелинейно деформируемую систему (рис.).

Для нее работа внешней силы P_i определяется выражением

$$A = \int_0^{\Delta_i} P(\Delta) d\Delta. \quad (9)$$

Величина этого интеграла графически определяется вертикально заштрихованной площадью на рисунке.

Разность между площадью прямоугольника $P_i \Delta_i$ и заштрихованной вертикально площадью

$$A' = P_i \Delta_i - \int_0^{\Delta_i} P(\Delta) d\Delta = \int_0^{\Delta_i} \Delta(P) dP \quad (10)$$

называется дополнительной работой.

Так как в соответствии с законом сохранения энергии $U = A$, то функционал (10), называемый дополнительной работой, в случае действия обобщенных сил $P_i (i = 1, 2, \dots, n)$ может быть записан в виде

$$U' = \sum_{i=1}^n P_i \Delta_i - U, \quad (11)$$

где U — потенциальная энергия деформации, равная действительной работе внешних сил на вызванных ими перемещениях, изображенная на рисунке площадью с вертикальной штриховкой; U' — дополнительная работа, изображенная на рисунке горизонтально заштрихованной площадью.

Запишем вариацию функционала (11):

$$\delta U' = \sum_{i=1}^n P_i \delta \Delta_i + \sum_{i=1}^n \delta P_i \Delta_i - \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial \Delta_i} \delta \Delta_i. \quad (12)$$

Так как на основании теоремы Лагранжа $\frac{\partial U}{\partial \Delta_i} = P_i$,

$$\text{то } \delta U' = \sum_{i=1}^n \delta P_i \Delta_i. \quad (13)$$

Принцип возможных изменений напряженного состояния, исходя из его физической сущности, называют также принципом дополнительной виртуальной (возможной) работы.

Если положить, что либо вариации внешних сил равны нулю, либо не перемещаются точки их приложения, то принцип возможных изменений напряженного состояния (изменения сил) принимает вид

$$\delta U' = 0. \quad (14)$$

Отсюда следует, что из всех возможных изменений напряженного состояния (изменений сил) условиям совместности деформаций удовлетворяют лишь те, при которых дополнительная работа принимает стационарное значение. Сформулированный принцип называется вариационным принципом Кастильяно.

Если выразить функционал U' через внешние силы, то вариацию этого функционала можно записать в следующем виде:

$$\delta U' = \sum_{i=1}^n \frac{\partial U'}{\partial P_i} \delta P_i. \quad (15)$$

Подставляя это выражение в (13), получаем

$$\sum_{i=1}^n \Delta_i \delta P_i - \sum_{i=1}^n \frac{\partial U'}{\partial P_i} \delta P_i = 0,$$

или

$$\sum_{i=1}^n \left(\Delta_i - \frac{\partial U'}{\partial P_i} \right) \delta P_i = 0. \quad (16)$$

Так как величины δP_i произвольны, то равенство (16) имеет место лишь при условии $\Delta_i - \frac{\partial U'}{\partial P_i} = 0$.

Следовательно,

$$\frac{\partial U'}{\partial P_i} = \Delta_i. \quad (17)$$

Это есть математическая запись теоремы Кастильяно: частная производная от дополнительной энергии (работы) по обобщенной силе равна соответствующему этой силе обобщенному перемещению.

Для системы в виде КЭ коэффициенты при неизвестных обобщенных (узловых) силах P_i в системе уравнений (17) являются элементами матрицы податливости и вектора податливостей от нагрузки в области, занимаемой КЭ и приведенной к узловой.

Дополнительная энергия, как и потенциальная энергия деформации, имеет минимум в действительном состоянии. Это означает, что при аппроксимации поля напряжений КЭ минимум функционала дополнительной энергии U' будет достигаться лишь в том случае, если это поле отвечает условиям равновесия и условиям на контуре.

При выполнении этих условий соответствующее поле перемещений (деформаций) будет отвечать условиям совместности на межэлементных границах КЭ.

Так как дополнительная энергия при действительном напряженном состоянии имеет минимум, то, следовательно, при приближенной аппроксимации этого поля соответствующая дополнительная энергия будет больше действительной.

Перемещения, соответствующие этой энергии, также будут больше действительных.

Это означает, что точное решение, всегда будет находиться решениями, полученными по МКЭ на основе принципа Лагранжа и на основе принципа Кастильяно.

Принцип возможных изменений напряженно-деформированного состояния. Этот принцип формируется следующим образом. Если система находится в равновесии, и ее деформации согласованы со всеми имеющимися внутренними и внешними связями (соблюдается совместимость деформаций системы), то сумма работ всех внешних и внутренних сил на возможных бесконечно малых перемещениях системы и возможных работ бесконечно малых приращений всех внешних сил на действительных перемещениях системы равна нулю:

$$\delta\Pi = \delta A + \delta W = \left(\sum_{i=1}^n \delta P_i \Delta_i + \sum_{i=1}^n P_i \Delta_i \right) + \delta U = 0. \quad (18)$$

Подставив в это выражение

$$\delta U + \delta U' = \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial \Delta_i} \delta \Delta_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial U'}{\partial P_i} \delta P_i,$$

получим

$$\delta \Pi = \sum_{i=1}^n \left(P_i - \frac{\partial U}{\partial \Delta_i} \right) \delta \Delta_i + \sum_{i=1}^n \left(\Delta_i - \frac{\partial U'}{\partial P_i} \right) \delta P_i = 0. \quad (19)$$

Смешанный функционал полной энергии и полной дополнительной энергии в состоянии равновесия конструкции не является ни минимальным, ни максимальным. Каждый такой функционал содержит не вырожденную квадратичную часть [4—6] и, значит его единственная стационарная точка, соответствующая состоянию равновесия конструкции, представляет собой невырожденное седло.

Из (19), в силу произвольности величин $\delta \Delta_i$ и δP_i , будем иметь для линейно деформируемых систем результаты, приведенные выше как теоремы Лагранжа и Кастильяно:

$$\frac{\partial U}{\partial \Delta_i} = P_i, \quad \frac{\partial U'}{\partial P_i} = \Delta_i. \quad (20)$$

Для получения матрицы откликов КЭ вместо записи системы уравнений в виде (20) используется их запись в виде

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = R_i, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \tilde{q}_j} = \Delta_j, \quad i = (1, 2, \dots, n), j = (n + 1, \dots, n + m), \quad (21)$$

где q_i — кинематические неизвестные в основной системе КЭ; $\tilde{q}_j$ — силовые неизвестные в основной системе; R_i — реакции во введенных связях основной системы КЭ; Δ_j — перемещения по направлениям удаленных связей.

По условиям равновесия и неразрывности деформаций $R_i = 0, \Delta_j = 0$.

Выполнив в (21) операции дифференцирования получаем при единичных обобщенных значениях узловых воздействий систему уравнений смешанной формы МКЭ:

$$[D]\{q\} = \{f\}, \quad (22)$$

где $[D] = \begin{bmatrix} r & \tilde{r} \\ \tilde{\delta} & \delta \end{bmatrix}$ — матрица откликов КЭ; блок $[r]$ — матрица жесткости относительно перемещений q_i в основной системе; блок $[\delta]$ — матрица податливости относительно усилий $\tilde{q}_j$ в основной системе; $[\tilde{r}] = -[\tilde{\delta}]^T$ — побочные блоки, косая симметрия которых является выражением теоремы о взаимности реакций и перемещений [4, 6]; $\{q\} = [q_i, \tilde{q}_j]^T$ — вектор основных неизвестных; $\{f\} = [f_i, \tilde{f}]^T$ — вектор внешних узловых воздействий.

При составлении функционала Π усилия в устраненных связях основной системы КЭ принимаются за внешнюю нагрузку. Так как по физическому смыслу они являются реакциями на воздействие внешних воздействий, приведенных к узлам КЭ, то их работа (энергия) противоположна по знаку.

Как было установлено в [4, 6], определитель системы уравнений смешанного метода отличен от нуля и, следовательно, квадратичная форма, входящая в смешанный функционал (19), является невырожденной, но имеет неопределенность по знаку.

На основе каждого из трех основных принципов механики сплошной среды развиты соответствующие виды МКЭ. В рамках каждого из них развиваются отдельные модели, удобные для решения конкретного класса задач.

Смешанные модели КЭ. Смешанные модели КЭ и смешанные формулировки МКЭ, называемые часто смешанным МКЭ, были сначала введены инженерами в 1960-х гг. для решения задач механики континуальных сред [7—9].

В смешанном методе вместо одного конечно-элементного пространства перемещений, используемого в стандартном МКЭ в перемещениях, используется два различных пространства — перемещений и усилий (напряжений).

Позже эти пространства расширены на трехмерные задачи [10].

Получение смешанных КЭ основано на вариационном принципе Хеллингера — Рейсснера [5, 11—14].

Используются два варианта этого принципа, функционально отличающиеся друг от друга выбором варьируемых функций, аппроксимация которых производится независимо. В первом варианте варьируются перемещения и внутренние силы, во втором — перемещения и деформации. При этом должны выполняться условия совместности по перемещениям и напряжениям на межэлементных границах.

С использованием вариационного принципа Рейсснера построено также большое количество смешанных КЭ с ослабленными требованиями к совместности на межэлементных границах. В этих КЭ в число степеней свободы включаются как узловые перемещения, так и узловые моменты.

Гибридные модели КЭ. Все гибридные модели можно условно разделить на две группы. Модели первой группы, называемые статически-гибридными, основаны на функционале дополнительной энергии и поле напряжений, моде-

ли второй группы, называемые деформационно-гибридными, — на модифицированном функционале потенциальной энергии и поле перемещений [5].

В моделях первой группы перемещения на межэлементных границах для удовлетворения условиям совместности аппроксимируются с помощью интерполяционных функций вдоль контура между узловыми параметрами перемещений смежных КЭ.

В моделях второй группы поле перемещений в каждом из КЭ аппроксимируется с помощью интерполяционных функций, не обеспечивающих совместность перемещений на границах смежных КЭ. Поэтому в функционал вводятся множители Лагранжа, по физическому смыслу являющиеся равнодействующими внутренних сил на контуре. Совместность перемещений на контурах при этом обеспечивается интегрально по контуру, а не конкретно во всех точках контура.

В гибридном методе напряжений идея (применительно к изгибу пластин) заключается в использовании принципа стационарности модифицированного функционала дополнительной энергии, предложенного Л. Геррманном [15], и независимых аппроксимаций изгибающих и крутящих моментов в области КЭ и перемещений на его границах.

Варьируемые функции в функционале должны удовлетворять дополнительным условиям: условиям равновесия в области КЭ и граничным условиям на контуре.

При такой аппроксимации не используются общие для соседних элементов узловые переменные, и поэтому внутренние силы оказываются разрывными, что снижает эффективность применения этого метода.

Смешанные и гибридные модели объединяет то, что у них основные неизвестные — смешанные, т.е. статические и деформационные. Разница лишь в виде и способе формирования условий совместности на межэлементных границах.

Принципиальное отличие гибридных элементов от смешанных состоит в том, что моменты аппроксимируются с использованием внутренних степеней свободы, которые исключаются на заключительном этапе получения матрицы жесткости. Условия непрерывности моментов на границах соседних элементов не накладываются.

Вариационные методы взвешенных невязок (методы резидуума). Для тех проблем, в которых невозможно построить функционал энергии со стационарным значением, вариационно-энергетические формулировки МКЭ неприменимы.

В таких случаях используются другие вариационные методы [3, 5], среди которых чаще всего — метод резидуума для решения дифференциальных уравнений задачи.

Сущность этих методов заключается в том, что функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению при заданных граничных условиях, заменяется приближенным аналитическим выражением, подбираемым так, чтобы она наилучшим образом аппроксимировала эту функцию.

Это наилучшее приближение может быть достигнуто различными путями: по методу наименьшего квадратичного отклонения;

Бубнова — Галеркина;
ортогонализации.

Применяя эти методы к отдельному КЭ, получаем соответствующие варианты резидуальной формулировки МКЭ.

Выбор метода решения задачи зависит от того, насколько хорошо этот метод поддается формализации, т.е. насколько формализовано формирование исходных матриц. На выбор метода оказывает также влияние количество разрешающих уравнений, степень заполненности их матрицы, а также возможность выполнить вычисления без существенной потери точности.

Разрешающие уравнения МКЭ в любых формах (метода сил, метода перемещений, смешанного метода, гибридных и др.) могут быть представлены в виде

$$Ax + B = 0, \quad (23)$$

где A — симметрическая матрица порядка n .

При этом следует отметить, что для уравнений смешанного метода симметризация достигается заменой знака на обратный в группе уравнений, из коэффициентов которых формируются блоки δ и $\tilde{\delta}$ в (22).

Симметрия матрицы A имеет большое значение, так как позволяет снизить объем вычислений независимо от того, какой способ решения системы (23) выбран.

Библиографический список

1. *Игнатъев А.В.* Основные формулировки метода конечных элементов в задачах строительной механики. Часть 1 // Вестник МГСУ. 2014. № 11. С. 37—57.
2. *Игнатъев А.В.* Основные формулировки метода конечных элементов в задачах строительной механики. Часть 2 // Вестник МГСУ. 2014. № 12. С. 40—59.
3. *Пратусевич Я.А.* Вариационные методы в строительной механике. М.-Л. : Стройиздат, 1948. 196 с.
4. *Игнатъев В.А., Игнатъев А.В., Жиделев А.В.* Смешанная форма метода конечных элементов в задачах строительной механики. Волгоград : Изд-во ВолгГАСУ, 2006. 172 с.
5. *Секулович М.* Метод конечных элементов / пер. с серб. Ю.Н. Зуева; под ред. В.Ш. Барбакадзе. М. : Стройиздат, 1993. 664 с.
6. *Шулькин Ю.Б.* Теория упругих стержневых конструкций. М. : Наука, 1984. 272 с.
7. *Fræijis de Veubeke B., Sander G.* An equilibrium model for plate bending // International J. Solids and Structures. 1968. Vol. 4. No. 4. Pp. 447—468.
8. *Herrmann L.* A Bending Analysis for Plates // Proc. Conf. Matrix. Meth. Str. Mech. Wright Patterson AFB, Ohio, AFFDL-TR-66-88, 1965. Pp. 577—604.
9. *Herrmann L.* Finite element bending analysis for plates // ASCE 93. No. EM5, 1967. Pp. 49—83.
10. *Nedelec J.C.* Mixed finite elements in R3 // Numerische Mathematik. September 1980. 35 (3). Pp. 315—341.
11. *Белкин А.Е., Гаврюшин С.С.* Расчет пластин методом конечных элементов. М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. 232 с.
12. *Васидзу К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М. : Мир, 1987. 542 с.
13. *Виссер В.* Улучшенный вариант дискретного элемента смешанного типа пластины при изгибе // Ракетная техника и космонавтика. 1969. № 9. С. 172—174.
14. *Ayad R., Dhatt G., Batoz J.L.* A new hybrid-mixed variational approach for Reissner-Mindlin plates. The MiSP model // International J. for Numerical Methods in Engineering. 1998. Vol. 42. No. 7. Pp. 1149—1179.

15. Herrmann L.R. Elasticity equations for incompressible and nearly incompressible materials by a variational theorem // AIAA J. 1965. Vol. 3. No. 10. Pp. 1896—1900.

Поступила в редакцию в октябре 2014 г.

Об авторе: **Игнатьев Александр Владимирович** — кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры строительной механики, **Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет (ФГБОУ ВПО «ВолГАСУ»)**, 400074, г. Волгоград, ул. Академическая, д. 1, alignat70@yandex.ru.

Для цитирования: *Игнатьев А.В.* Основные формулировки метода конечных элементов в задачах строительной механики. Часть 3 // Вестник МГСУ. 2015. № 1. С. 16—26.

A.V. Ignat'ev

MAIN FORMULATIONS OF THE FINITE ELEMENT METHOD FOR THE PROBLEMS OF STRUCTURAL MECHANICS Part 3

In this paper the author offers is the classification of the formulae of Finite Element Method. This classification help to orient in a huge number of published articles, as well as those to be published, which are dedicated to the problem of enhancing the efficiency of the most commonly used method. The third part of the article considers the variation formulations of FEM and the energy principles lying in the basis of it.

If compared to the direct method, which is applied only to finite elements of a simple geometrical type, the variation formulations of FEM are applicable to the elements of any type. All the variation methods can be conventionally divided into two groups. The methods of the first group are based on the principle of energy functional stationarity — a potential system energy, additional energy or on the basis of these energies, which means the full energy. The methods of the second group are based on the variants of mathematical methods of weighted residuals for solving the differential equations, which in some cases can be handled according to the principle of possible displacements or extreme energy principles.

The most widely used and multipurpose is the approach based on the use of energy principles coming from the energy conservation law: principle of possible changes in stress state, principle of possible change in stress-strain state.

Key words: finite element method, formulations classification, numerical method, variation formulations.

References

1. Ignat'ev A.V. Osnovnye formulirovki metoda konechnykh elementov v zadachakh stroitel'noy mekhaniki. Chast' 1 [Essential FEM Statements Applied to Structural Mechanics Problems. Part 1]. *Vestnik MGSU* [Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering]. 2014, no. 11, pp. 37—57. (In Russian)
2. Ignat'ev A.V. Osnovnye formulirovki metoda konechnykh elementov v zadachakh stroitel'noy mekhaniki. Chast' 2 [Main Formulations of the Finite Element Method for the Problems of Structural Mechanics. Part 2]. 2014, no. 12, pp. 40—59. (In Russian)
3. Pratushevich Ya.A. *Variatsionnye metody v stroitel'noy mekhanike* [Variation Methods in Construction Mechanics]. Moscow-Leningrad, Stroyizdat Publ., 1948, 196 p. (in Russian)
4. Ignat'ev V.A., Ignat'ev A.V., Zhidelev A.V. *Smeshannaya forma metoda konechnykh elementov v zadachakh stroitel'noy mekhaniki* [Mixed Form of Finite Element Method in Problems of Structural Mechanics]. Volgograd, VolGASU Publ., 2006, 172 p. (In Russian)
5. Sekulovich M. *Metod konechnykh elementov* [Finite Element Method]. Translation from Serbian. Moscow, Stroyizdat Publ., 1993, 664 p. (In Russian)

6. Shul'kin Yu.B. *Teoriya uprugikh sterzhnevnykh konstruksiy* [Theory of Elastic Bar Systems]. Moscow, Nauka Publ., 1984, 272 p. (In Russian)
7. Fraeijns de Veubeke B., Sander G. An Equilibrium Model for Plate Bending. *International J. Solids and Structures*. 1968, vol. 4, no. 4, pp. 447—468. DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/0020-7683\(68\)90049-8](http://dx.doi.org/10.1016/0020-7683(68)90049-8).
8. Herrmann L. A Bending Analysis for Plates. *Proc. Conf. Matrix. Meth. Str. Mech.* Wright Patterson AFB, Ohio, AFFDL-TR-66-88, 1965, pp. 577—604.
9. Herrmann L. Finite Element Bending Analysis for Plates. *ASCE* 93. No. EM5, 1967, pp. 49—83.
10. Nedelec J.C. Mixed Finite Elements in R3. *Numerische Mathematik*. September 1980, 35 (3), pp. 315—341.
11. Belkin A.E., Gavryushkin S.S. *Raschety plastin metodom konechnykh elementov* [Calculation of Plates by Finite Element Method]. Moscow, MGTU named after N.E. Bauman Publ., 2008, 232 p. (In Russian)
12. Vasilidze K. *Variatsionnye metody v teorii uprugosti i plastichnosti* [Variation Methods in Plasticity Theory]. Moscow, Mir Publ., 1987, 542 p. (In Russian)
13. Visser V. Uluchshenny variant diskretnogo elementa smeshannogo tipa plastiny pri izgibe [Improved Variant of the Discrete Element of Mixed Type of a Plate at Bending]. *Raketnaya tekhnika i kosmonavtika* [Rocket Engineering and Space Technologies]. 1969, no. 9, pp. 172—174. (In Russian)
14. Ayad R., Dhatt G., Batoz J.L. A New Hybrid-mixed Variational Approach for Reissner-Mindlin plates. The MiSP model. *International J. for Numerical Methods in Engineering*. 1998, vol. 42, no. 7, pp. 1149—1179. DOI: [http://dx.doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0207\(19980815\)42:7<1149::AID-NME391>3.0.CO;2-2](http://dx.doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(19980815)42:7<1149::AID-NME391>3.0.CO;2-2).
15. Herrmann L.R. Elasticity Equations for Incompressible and Nearly Incompressible Materials by a Variational Theorem. *AIAA J.* 1965, vol. 3, no. 10, pp. 1896—1900. DOI: <http://dx.doi.org/10.2514/3.3277>.

About the author: **Ignat'ev Aleksandr Vladimirovich** — Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Structural Mechanics, **Volgograd State University of Architecture and Civil Engineering (VSUACE)**, 1 Akademicheskaya str., Volgograd, 400074, Russian Federation; alignat70@yandex.ru.

For citation: Ignat'ev A.V. Osnovnye formulirovki metoda konechnykh elementov v zadachakh stroitel'noy mekhaniki. Chast' 3 [Main Formulations of the Finite Element Method for the Problems of Structural Mechanics. Part 3]. *Vestnik MGSU* [Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering]. 2015, no. 1, pp. 16—26. (In Russian)