СТРОИТЕЛЬНОЕ МАТЕРИАЛОВЕДЕНИЕ

УДК 517.9+531.012

Л.И. Кузьмина,

Ю.В. Осипов*

НИУ ВШЭ, *ФГБОУ ВПО
«МГСУ»

АСИМПТОТИКА ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ СУСПЕНЗИИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Рассмотрена механико-геометрическая модель фильтрации суспензии в пористой среде. Предполагается, что твердые частицы беспрепятственно проходят через поры большого диаметра и застревают на входе пор, размер которых меньше размера частиц. Концентрации взвешенных и осажденных частиц удовлетворяют квазилинейной гиперболической системе уравнений в частных производных первого порядка. Асимптотическое решение перед фронтом распространения концентрации строится в предположении малости коэффициента фильтрации.

Ключевые слова: суспензия, пористая среда, задача фильтрации, коэффициент фильтрации, квазилинейная гиперболическая система, характеристическая линия, асимптотическое решение.

Фильтрация взвеси мельчайших твердых частиц — суспензии в пористой среде является актуальной задачей для многих областей науки и техники. При долгосрочной оценке прочности фундаментов необходимо учитывать состав грунта и проникающую способность грунтовых вод. В нефтя-

L.I. Kuzmina, Yu.V. Osipov

Higher School of Economics, MGSU

ASYMPTOTICS OF THE FILTRATION PROBLEM FOR SUSPENSION IN POROUS MEDIA

The mechanical-geometric model of the suspension filtering in the porous media is considered. Suspended solid particles of the same size move with suspension flow through the porous media — a solid body with pores — channels of constant cross section. It is assumed that the particles pass freely through the pores of large diameter and are stuck at the inlet of pores that are smaller than the particle size. It is considered that one particle can clog only one small pore and vice versa. The particles stuck in the pores remain motionless and form a deposit. The concentrations of suspended and retained particles satisfy a quasilinear hyperbolic system of partial differential equations of the first order, obtained as a result of macro-averaging of micro-stochastic diffusion equations. Initially the porous media contains no particles and both concentrations are equal to zero; the suspension supplied to the porous media inlet has a constant concentration of suspended particles. The flow of particles moves in the porous media with a constant speed, before the wave front the concentrations of suspended and retained particles are zero. Assuming that the filtration coefficient is small we construct an asymptotic solution of the filtration problem over the concentration front. The terms of the asymptotic expansions satisfy linear partial differential equations of the first order and are determined successively in an explicit form. It is shown that in the simplest case the asymptotics found matches the known asymptotic expansion of the solution near the concentration front.

Key words: suspension, porous media, filtration problem, filtration coefficient, quasilinear hyperbolic system, characteristic line, asymptotic solution.

Filtration of a suspension — a slurry of tiny solid particles in a porous media — is a common phenomenon in nature and in many industrial applications. With long-term assessment of the strength of the construction

ной промышленности перемещение мелких частиц горных пород может привести к значительному падению добычи нефти [1—3]. В разнообразных технических и биологических системах очистки поверхностных и сточных вод и жидких промышленных отходов происходит захват частиц при движении суспензии через фильтрующую среду [4—9].

В работе рассматривается математическая модель фильтрации суспензии, основанная на механико-геометрическом взаимодействии частиц с пористой средой [10—17]. Предполагается, что частицы свободно проходят через пустоты — поры большого диаметра и застревают на входе пор, размеры которых меньше размера частиц (рис.).

bases it is necessary to consider the composition of the soil and groundwater penetrating ability. In petroleum industry, the migration of fine particles in low consolidated natural rocks may lead to significant decline of oil production [1—3]. In various technical and biological treatment systems for surface and waste water and liquid industrial waste solid particles are captured while moving with the suspension through the filter medium [4—9].

In this paper we consider a mathematical model of suspension filtration in porous media based on the mechanical-geometric interaction of particles with pores [10—17]. It is assumed that the particles pass freely through the interstices — pores of large diameter and get stuck at the inlet of pores, which are smaller than the particle size (Fig.).

Поперечное сечение пористой среды с взвешенными и осажденными частицами

The cross-section of porous media with suspended and retained particles

Концентрации взвешенных $C(x, t)$ и осажденных $S(x, t)$ частиц удовлетворяют квазилинейной гиперболической системе дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных

The concentration $C(x, t)$ of the suspended particles and the concentration $S(x, t)$ of the retained particles satisfy the quasi-linear hyperbolic system of partial differential equations of the first order

$$\frac{\partial(a(S)C + S)}{\partial t} + \frac{\partial(b(S)C)}{\partial x} = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = K(S)C, \quad (2)$$

где $K(S)$ — коэффициент фильтрации. Функции $a(S)$, $b(S)$, $K(S)$ гладкие и положительные при $S \geq 0$.

here $K(S)$ is a filtration coefficient, functions $a(S)$, $b(S)$, $K(S)$ are smooth and positive, when $S \geq 0$.

Система уравнений (1), (2) рассматривается в области

$$\Omega = \{0 < x < 1, t > 0\}.$$

Краевые условия для систем (1), (2) ставятся на входе фильтра $x = 0$ и в начальный момент времени $t = 0$:

$$C(x, t)|_{x=0} = p, \quad p > 0; \quad (3)$$

$$C(x, t)|_{t=0} = 0; \quad (4)$$

$$S(x, t)|_{t=0} = 0. \quad (5)$$

Строгий вывод уравнений задачи (1)—(5) на основе микростохастических уравнений фильтрации с последующим макроосреднением содержится в [18]. Решение задачи в интегральной форме приведено в [19]. Однако найти решение аналитически в явном виде удастся лишь в простейших случаях [20—22]. В [23] строится асимптотическое решение задачи (1)—(5) вблизи волнового фронта, а в [24] найдена асимптотика вблизи входа фильтра.

Пусть коэффициент фильтрации мал. Представим его в виде

$$K(S) = \varepsilon \Lambda(S),$$

где ε — малый положительный параметр. Пусть функции $a(S)$, $b(S)$, $\Lambda(S)$ регулярны в окрестности $S = 0$ и

$$a(S) = a_0 + a_1 S + a_2 S^2 + a_3 S^3 + \dots, \quad a_0 > 0, \quad (6)$$

$$b(S) = b_0 + b_1 S + b_2 S^2 + b_3 S^3 + \dots, \quad b_0 > 0, \quad (7)$$

$$\Lambda(S) = \lambda_0 + \lambda_1 S + \lambda_2 S^2 + \lambda_3 S^3 + \dots, \quad \lambda_0 > 0. \quad (8)$$

Ниже мы построим асимптотику задачи (1)—(5) при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Обозначим $\alpha = \frac{a_0}{b_0}$. При $\varepsilon = 0$ находим точное решение задачи:

$$C(x, t) = p, \quad t > \alpha x; \quad C(x, t) = 0, \quad t < \alpha x; \quad S(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Omega.$$

В общем случае $\varepsilon > 0$ прямая $t = \alpha x$ является характеристикой квазилинейной гиперболической системы, на которой решение имеет разрыв [23]:

The system of equations (1) and (2) is treated in the domain

The boundary conditions for the system (1), (2) are placed at the filter inlet $x = 0$ and at the initial moment $t = 0$:

A rigorous derivation of the filtration problem (1)—(5) on the basis of micro-stochastic diffusion equations, followed by macro-averaging is contained in [18]. The solution in the integral form is given in [19]. However, the analytical solution in an explicit form can only be found in the simplest cases [20—22]. In [23] an asymptotic solution of the problem (1)—(5) in the vicinity of the wave front was constructed; in [24] the asymptotics near the filter inlet was found.

Let the filtration coefficient is small. We represent it in the form

where ε is a small positive parameter. Let the functions $a(S)$, $b(S)$, $\Lambda(S)$ are regular in a neighborhood $S = 0$ and

Below we construct the asymptotic solution of the problem (1)—(5) if $\varepsilon \rightarrow 0$.

Denote $\alpha = \frac{a_0}{b_0}$. If $\varepsilon = 0$ the exact solution of the problem is

In general case $\varepsilon > 0$ the straight line $t = \alpha x$ is a characteristic of quasi-linear hyperbolic system, on which the solution is discontinuous [23]

$$C(x, t) \begin{cases} = 0, & t < \alpha x, \\ > 0, & t > \alpha x; \end{cases} \quad S(x, t) \begin{cases} = 0, & t < \alpha x, \\ > 0, & t > \alpha x. \end{cases}$$

В области $t > \alpha x$ начальные условия (4), (5) можно заменить одним условием на характеристике:

$$S(x, t)|_{t=\alpha x} = 0. \quad (9)$$

Будем искать решение задачи (1)—(3), (9) в виде рядов по степеням ε :

$$S(x, t, \varepsilon) = \varepsilon s_1(x, t) + \varepsilon^2 s_2(x, t) + \varepsilon^3 s_3(x, t) + \dots, \quad (10)$$

$$C(x, t, \varepsilon) = p + \varepsilon c_1(x, t) + \varepsilon^2 c_2(x, t) + \dots \quad (11)$$

Найдем три первых члена асимптотики (10), (11). Подставим разложения (6)—(8), (10), (11) в уравнения (1), (2) и, приравнявая выражения при одинаковых степенях ε , составим системы для определения неизвестных функций $s_k(x, t)$, $c_k(x, t)$. Имеем:

$$\varepsilon^1: \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(a_0 c_1 + a_1 p s_1) + \frac{\partial}{\partial x}(b_0 c_1 + b_1 p s_1) = -\lambda_0 p; \\ \frac{\partial s_1}{\partial t} = \lambda_0 p; \end{cases} \quad (12)$$

$$\varepsilon^2: \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(a_0 c_2 + a_1 c_1 s_1 + a_2 p s_1^2 + a_1 p s_2) + \\ + \frac{\partial}{\partial x}(b_0 c_2 + b_1 c_1 s_1 + b_2 p s_1^2 + b_1 p s_2) = -(\lambda_0 c_1 + \lambda_1 p s_1); \\ \frac{\partial s_2}{\partial t} = \lambda_0 c_1 + \lambda_1 p s_1; \end{cases} \quad (13)$$

$$\varepsilon^3: \frac{\partial s_3}{\partial t} = \lambda_0 c_2 + \lambda_1 c_1 s_1 + \lambda_1 p s_2 + \lambda_2 p s_1^2. \quad (14)$$

Определим краевые условия для (12)—(14), подставляя (10), (11) в (3), (5):

$$s_1|_{t=\alpha x} = 0, \quad s_2|_{t=\alpha x} = 0, \quad s_3|_{t=\alpha x} = 0; \quad (15)$$

$$c_1|_{x=0} = 0, \quad c_2|_{x=0} = 0. \quad (16)$$

Последовательно решая методом характеристик уравнения (12)—(14) с условиями (15), (16), находим

In the domain $t > \alpha x$ the initial conditions (4) and (5) can be replaced by one condition on the characteristic line:

We seek a solution to the problem (1)—(3), (9) as a series in powers of ε :

In order to find the first three terms of the asymptotics (10), (11) we substitute the expansions (6)—(8), (10), (11) in the equations (1), (2) and equating the expressions of the same powers of ε , we compose the system to determine the unknown functions $s_k(x, t)$, $c_k(x, t)$.

In order to define boundary conditions for the equations (12)—(14), we substitute (10), (11) in (3), (5):

Successively solving the equations (12)—(14) with the conditions (15) and (16) by the method of characteristics we find

$$s_1 = \lambda_0 p(t - \alpha x); \quad (17)$$

$$c_1 = \mu x, \quad \mu = \frac{\lambda_0 p}{b_0} (\alpha p b_1 - p a_1 - 1); \quad (18)$$

$$s_2 = \lambda_0 \mu x (t - \alpha x) + \frac{\lambda_0 \lambda_1 p^2}{2} (t - \alpha x)^2; \quad (19)$$

$$c_2 = \frac{A\alpha}{2a_0} x^2 + \frac{B\alpha}{a_0} x(t - \alpha x);$$

$$A = 2\lambda_0 p \mu (b_1 \alpha - a_1) - \lambda_0 \mu; \quad (20)$$

$$B = \lambda_0 \lambda_1 p^3 (b_1 \alpha - a_1) + 2\lambda_0^2 p^3 (b_2 \alpha - a_2) - \lambda_0 p (2\mu b_1 + \lambda_1 p);$$

$$s_3 = \frac{\lambda_0}{2b_0} x(t - \alpha x) (Ax + B(t - \alpha x)) +$$

$$+ \lambda_0 \lambda_1 p \mu x (t - \alpha x)^2 + \frac{\lambda_0 p^3}{6} (\lambda_1^2 + 2\lambda_0 \lambda_2) (t - \alpha x)^3. \quad (21)$$

Подставим в (10), (11) найденные выражения (17)—(21) для членов асимптотики. В области $t > \alpha x$ асимптотическое решение задачи (1)—(5) имеет вид

We substitute in (10), (11) the found expressions (17)—(21) for the asymptotic terms. In the domain $t > \alpha x$ the asymptotic solution of the problem (1)—(5) has the form

$$S(x, t, \varepsilon) = \varepsilon \lambda_0 p (t - x) + \varepsilon^2 \left(\lambda_0 \mu x (t - \alpha x) + \frac{\lambda_0 \lambda_1 p^2}{2} (t - \alpha x)^2 \right) +$$

$$+ \varepsilon^3 \left(\frac{\lambda_0}{2b_0} x(t - \alpha x) (Ax + B(t - \alpha x)) + \lambda_0 \lambda_1 p \mu x (t - \alpha x)^2 + \right. \quad (22)$$

$$\left. + \frac{\lambda_0 p^3}{6} (\lambda_1^2 + 2\lambda_0 \lambda_2) (t - \alpha x)^3 \right) + O(\varepsilon^4);$$

$$C(x, t, \varepsilon) = p + \varepsilon \mu x + \varepsilon^2 \left(\frac{A\alpha}{2a_0} x^2 + \frac{B\alpha}{a_0} x(t - \alpha x) \right) + O(\varepsilon^3). \quad (23)$$

Отметим, что для простой системы ($a(S) = 1$, $b(S) = 1$) при $\varepsilon = 1$ представления (22), (23) являются главными членами разложения в ряд по степеням x асимптотики решения вблизи характеристики $t = x$ [25]:

Let us note that for a simple system ($a(S) = 1$, $b(S) = 1$) when $\varepsilon = 1$, the expressions (22) and (23) are the main terms of the expansion in powers of x of the asymptotic solution near the characteristics $t = x$ [25]:

$$S(x, t) = p \lambda_0 e^{-\lambda_0 x} (t - x) + \lambda_1 \lambda_0 p^2 \left(e^{-2\lambda_0 x} - \frac{1}{2} e^{-\lambda_0 x} \right) (t - x)^2 +$$

$$+ p^3 \left(\left(\lambda_1^2 \lambda_0 + \frac{\lambda_2 \lambda_0^2}{2} \right) e^{-3\lambda_0 x} - \lambda_1^2 \lambda_0 e^{-2\lambda_0 x} + \frac{\lambda_1^2 \lambda_0 - \lambda_2 \lambda_0^2}{6} e^{-\lambda_0 x} \right) (t - x)^3 + \dots, \quad (24)$$

$$C(x, t) = p e^{-\lambda_0 x} + p^2 \lambda_1 (e^{-2\lambda_0 x} - e^{-\lambda_0 x}) (t - x) + O(t - x)^2. \quad (25)$$

В заключение сформулируем важное физическое условие и вытекающее из него условие на коэффициенты уравнения (1). При прохождении через фильтр часть взвешенных частиц суспензии застревает в порах и образует осадок, поэтому концентрация взвешенных частиц в фильтре должна быть меньше концентрации на входе:

$$C(x, t) < C(0, t) = p, \quad 0 < x < 1, t > 0. \quad (26)$$

Из (23), (26) следует $\mu < 0$. Получаем условие на производные функций $a(S)$, $b(S)$, при $S = 0$

$$p(\alpha b_1 - a_1) < 1. \quad (27)$$

Из вида главного члена асимптотики [23] системы (1)—(5) вблизи фронта концентраций частиц также следует, что физическое условие (26) влечет (27).

Система уравнений, описывающая движение частиц в пористой среде, в общем случае не имеет точного аналитического решения. Построенная асимптотика дает возможность найти приближенное решение при малых значениях коэффициента фильтрации и получить важное соотношение для коэффициентов системы.

Библиографический список

1. Barenblatt G.I., Entov V.M., Ryzhik V.M. Theory of fluid flows through natural rocks. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1990. 395 p.
2. Bedrikovetsky P., Mathematical theory of oil and gas recovery with applications to ex-USSR oil and gas fields. Dordrecht : Kluwer Academic, 1993. 576 p.
3. Khilar K.C., Fogler H.S. Migrations of fines in porous media. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1998. 180 p.
4. Tien C., Ramarao B.V. Granular Filtration of Aerosols and Hydrosols. 2nd ed. Amsterdam : Elsevier, 2007. 512 p.
5. Tufenkji N. Colloid and microbe migration in granular environments: A

Finally, we consider an important physical condition and the ensuing condition on the coefficients of the equation (1). While passing through the porous media a portion of the suspended particles in the suspension gets stuck in the pores and forms a deposit, therefore the concentration of the suspended particles inside the filter should be less than the concentration at the inlet:

From (23) (26) we get $\mu < 0$ and obtain the condition on the derivatives of the functions $a(S)$, $b(S)$ at $S = 0$:

The main term of the asymptotics [23] of the system (1)—(5) near the concentration front also suggests that the physical condition (26) implies (27).

The system of the equations describing the particle motion in a porous medium, in general, has no exact analytical solutions. The asymptotics found makes it possible to obtain an approximate solution for small values of the filtration coefficient and to get an important relationship for the coefficients of the system.

References

1. Barenblatt G.I., Entov V.M., Ryzhik V.M. Theory of Fluid Flows Through Natural Rocks. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 1990, 395 p.
2. Bedrikovetsky P. Mathematical Theory of Oil and Gas Recovery with Applications to Ex-USSR Oil and Gas Fields. Dordrecht, Kluwer Academic, 1993, 576 p.
3. Khilar K.C., Fogler H.S. Migrations of Fines in Porous Media. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 1998, 173 p.
4. Tien C., Ramarao B.V. Granular Filtration of Aerosols and Hydrosols. 2nd ed. Amsterdam, Elsevier, 2007, 512 p.
5. Tufenkji N. Colloid and Microbe Migration in Granular Environments: A Discussion of Modeling Methods. Colloidal Transport in Porous Media. 2007, pp. 119—142.

discussion of modeling methods // Colloidal Transport in Porous Media. 2007. Pp. 119—142.

6. Baveye P., Vandevivere P., Hoyle B.L., DeLeo P.C., De Lozada D.S. Environmental impact and mechanisms of the biological clogging of saturated soils and aquifer materials // Critical Reviews in Environmental Science and Technology. 1998. Vol. 28. Pp. 123—191.

7. Vidali M. Bioremediation. An overview // Pure and Applied Chemistry. 2001. Vol. 73. No. 7. Pp. 1163—1172.

8. Gitis V., Dlugy C., Ziskind G., Sladkevich S., Lev O. Fluorescent clays — similar transfer with sensitive detection // Chemical Engineering Journal. 2011. Vol. 174. No. 1. Pp. 482—488.

9. Bradford S., Kim H., Haznedaroglu B., Torkzaban S., Walker S. Coupled factors influencing concentration-dependent colloid transport and retention in saturated porous media // Environ. Sci. Technol. 2009. Vol. 43 (18). Pp. 6996—7002.

10. You Z., Badalyan A., Bedrikovetsky P. Size-Exclusion Colloidal Transport in Porous Media-Stochastic Modeling and Experimental Study // SPE Journal. 2013. Vol. 18. No. 4. Pp. 620—633.

11. Bedrikovetsky P. Upscaling of Stochastic Micro Model for Suspension Transport in Porous Media // Transport in Porous Media. 2008. Vol. 75. No. 3. Pp. 335—369.

12. Chalk P., Gooding N., Hutten S., You Z., Bedrikovetsky P. Pore size distribution from challenge coreflood testing by colloidal flow // Chemical Engineering Research and Design. 2012. Vol. 90. No. 1. Pp. 63—77.

13. Mays D.C., Hunt J.R. Hydrodynamic and chemical factors in clogging by montmorillonite in porous media // Environmental Science and Technology. 2007. Vol. 41. No. 16. Pp. 5666—5671.

14. Civan F. Reservoir formation damage : fundamentals, modeling, assessment, and mitigation, 2nd ed. Amsterdam : Gulf Professional Pub., 2007. 760 p.

15. Gitis V., Rubinstein I., Livshits M., Ziskind G. Deep-bed filtration model with multistage deposition kinetics // Chemi-

DOI: http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-71339-5_5.

6. Baveye P., Vandevivere P., Hoyle B.L., DeLeo P.C., De Lozada D.S. Environmental Impact and Mechanisms of the Biological Clogging of Saturated Soils and Aquifer Materials. Critical Reviews in Environmental Science and Technology. 1998, vol. 28, pp. 123—191. DOI: <http://dx.doi.org/10.1080/10643389891254197>.

7. Vidali M. Bioremediation. An Overview. Pure and Applied Chemistry. 2001, vol. 73, no. 7, pp. 1163—1172. DOI: <http://dx.doi.org/10.1351/pac200173071163>.

8. Gitis V., Dlugy C., Ziskind G., Sladkevich S., Lev O. Fluorescent Clays — Similar Transfer with Sensitive Detection. Chemical Engineering Journal. 2011, vol. 174, no. 1, pp. 482—488. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.cej.2011.08.063>.

9. Bradford S., Kim H., Haznedaroglu B., Torkzaban S., Walker S. Coupled Factors Influencing Concentration-Dependent Colloid Transport and Retention in Saturated Porous Media. Environ. Sci. Technol. 2009, vol. 43 (18), pp. 6996—7002. DOI: <http://dx.doi.org/10.1021/es900840d>.

10. You Z., Badalyan A., Bedrikovetsky P. Size-Exclusion Colloidal Transport in Porous Media-Stochastic Modeling and Experimental Study. SPE Journal. 2013, vol. 18, no. 4, pp. 620—633. DOI: <http://dx.doi.org/10.2118/162941-PA>.

11. Bedrikovetsky P. Upscaling of Stochastic Micro Model for Suspension Transport in Porous Media. Transport in Porous Media. 2008, vol. 75, no. 3, pp. 335—369. DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s11242-008-9228-6>.

12. Chalk P., Gooding N., Hutten S., You Z., Bedrikovetsky P. Pore Size Distribution from Challenge Coreflood Testing by Colloidal Flow. Chemical Engineering Research and Design. 2012, vol. 90, no. 1, pp. 63—77. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.cherd.2011.08.018>.

13. Mays D.C., Hunt J.R. Hydrodynamic and Chemical Factors in Clogging by Montmorillonite in Porous Media. Environmental Science and Technology. 2007, vol. 41, no. 16, pp. 5666—5671. DOI: <http://dx.doi.org/10.1021/es062009s>.

cal Engineering Journal. 2010. Vol. 163. No. 1—2. Pp. 78—85.

16. Noubactep C., Care S. Dimensioning metallic iron beds for efficient contaminant removal // Chemical Engineering Journal. 2010. Vol. 163. No. 3. Pp. 454—460.

17. Yuan H., Shapiro A.A. A mathematical model for non-monotonic deposition profiles in deep bed filtration systems // Chemical Engineering Journal. 2011. Vol. 166. No. 1. Pp. 105—115.

18. Santos A., Bedrikovetsky P. A stochastic model for particulate suspension flow in porous media // Transport in Porous Media. 2006. Vol. 62. Pp. 23—53.

19. You Z., Bedrikovetsky P., Kuzmina L. Exact Solution for Long-Term Size Exclusion Suspension-Colloidal Transport in Porous Media // Abstract and Applied Analysis. 2013. Vol. 2013. 9 p.

20. Herzig J.P., Leclerc D.M., Goff P. Le. Flow of suspensions through porous media — application to deep filtration // Industrial and Engineering Chemistry. 1970. Vol. 62 (5). Pp. 8—35.

21. Alvarez A.C., Bedrikovetskii P.G., Hime G., Marchesin D., Rodrigues J.R. A fast Inverse Solver for the filtration function for flow of water with particles in porous media // J. of Inverse Problems. 2006. Vol. 22. Pp. 69—88.

22. Vyazmina E.A., Bedrikovetskii P.G., Polyanin A.D. New classes of exact solutions to nonlinear sets of equations in the theory of filtration and convective mass transfer // Theoretical Foundations of Chemical Engineering. 2007. Vol. 41. No. 5. Pp. 556—564.

23. You Z., Osipov Y., Bedrikovetsky P., Kuzmina L. Asymptotic model for deep bed filtration // Chemical Engineering Journal. 2014. Vol. 258. Pp. 374—385.

24. Kuzmina L.I., Osipov Yu.V. Particle transportation at the filter inlet // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2014. Vol. 10. Iss. 3. Pp. 17—22.

25. Кузьмина Л.И., Осипов Ю.В. Математическая модель движения частиц в фильтре // Вопросы прикладной

14. Civan F. Reservoir Formation Damage : Fundamentals, Modeling, Assessment, and Mitigation. 2nd ed. Amsterdam, Gulf Professional Pub., 2007.

15. Gitis V., Rubinstein I., Livshits M., Ziskind G. Deep-Bed Filtration Model with Multistage Deposition Kinetics. Chemical Engineering Journal. 2010, vol. 163, no. 1—2, pp. 78—85. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.cej.2010.07.044>.

16. Noubactep C., Care S. Dimensioning Metallic Iron Beds for Efficient Contaminant Removal. Chemical Engineering Journal. 2010, vol. 163, no. 3, pp. 454—460.

17. Yuan H., Shapiro A.A. A Mathematical Model for Non-Monotonic Deposition Profiles in Deep Bed Filtration Systems. Chemical Engineering Journal. 2011, vol. 166, no. 1, pp. 105—115. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.cej.2010.10.036>.

18. Santos A., Bedrikovetsky P. A Stochastic Model for Particulate Suspension Flow in Porous Media. Transport in Porous Media. 2006, vol. 62, pp. 23—53. DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s11242-005-5175-7>.

19. You Z., Bedrikovetsky P., Kuzmina L. Exact Solution for Long-Term Size Exclusion Suspension-Colloidal Transport in Porous Media. Abstract and Applied Analysis. 2013, vol. 2013, 9 p. DOI: <http://dx.doi.org/10.1155/2013/680693>.

20. Herzig J.P., Leclerc D.M., Goff P. Le. Flow of Suspensions Through Porous Media — Application to Deep Filtration. Industrial and Engineering Chemistry. 1970, vol. 62 (5), pp. 8—35. DOI: <http://dx.doi.org/10.1021/ie50725a003>.

21. Alvarez A.C., Bedrikovetsky P.G., Hime G., Marchesin D., Rodrigues J.R. A Fast Inverse Solver for the Filtration Function for Flow of Water with Particles in Porous Media. J. of Inverse Problems. 2006, vol. 22, pp. 69—88. DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/0266-5611/22/1/005>.

22. Vyazmina E.A., Bedrikovetskii P.G., Polyanin A.D. New Classes of Exact Solutions to Nonlinear Sets of Equations in the Theory of Filtration and Convective Mass Transfer. Theoretical Foundations of Chemical Engineering. 2007, vol. 41, no. 5, pp. 556—564. DOI: <http://dx.doi.org/10.1134/S0040579507050168>.

математики и вычислительной механики : сб. науч. тр. М. : МГСУ, 2014. Т. 17. С. 295—304.

Поступила в редакцию в декабре 2014 г.

Об авторах: **Кузьмина Людмила Ивановна** — кандидат физико-математических наук, доцент, доцент департамента прикладной математики Московского института электроники и математики, **Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики (НИУ ВШЭ)**, 101000, г. Москва, ул. Мясницкая, д. 20, lkuzmina@hse.ru;

Осипов Юрий Викторович — кандидат физико-математических наук, доцент, профессор кафедры информатики и прикладной математики, **Московский государственный строительный университет (ФГБОУ ВПО «МГСУ»)**, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, yuri-osipov@mail.ru.

Для цитирования: *Кузьмина Л.И., Осипов Ю.В. Асимптотика задачи фильтрации суспензии в пористой среде // Вестник МГСУ. 2015. № 1. С. 54—62.*

23. You Z., Osipov Y., Bedrikovetsky P., Kuzmina L. Asymptotic Model for Deep Bed Filtration. Chemical Engineering Journal. 2014, vol. 258, pp. 374—385. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.cej.2014.07.051>.

24. Kuzmina L.I., Osipov Yu.V. Particle Transportation at the Filter Inlet. International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2014, vol. 10, iss. 3, pp. 17—22.

25. Kuzmina L.I., Osipov Yu.V. Matematicheskaya model' dvizheniya chastits v fil'tre [Mathematical Model of Particle Motion in the Filter]. *Voprosy prikladnoy matematiki i vychislitel'noy mekhaniki : sbornik nauchnykh trudov* [Problems of Applied Mathematics and Computational Mechanics]. Moscow, MGSU Publ., 2014, vol. 17, pp. 295—304. (in Russian)

Received in December 2014.

About the authors: **Kuzmina Ludmila Ivanovna** — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Applied Mathematics, Moscow Institute of Electronics and Mathematics, **Higher School of Economics**, 20 Myasnitskaya str., Moscow, 101000, Russian Federation; lkuzmina@hse.ru;

Osipov Yuri Viktorovich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Department of Computer Science and Applied Mathematics, **Moscow State University of Civil Engineering (MGSU)**, 26 Yaroslavl'skoe Shosse, Moscow, 129337, Russian Federation; yuri-osipov@mail.ru.

For citation: *Kuzmina L.I., Osipov Yu.V. Asimptotika zadachi fil'tratsii suspenzii v poristoy srede [Asymptotics of the Filtration Problem for Suspension in Porous Media]. Vestnik MGSU [Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering]. 2015, no. 1, pp. 54—62. (in Russian)*