ПРОЕКТИРОВАНИЕ И КОНСТРУИРОВАНИЕ СТРОИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ. ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ В СТРОИТЕЛЬСТВЕ

УДК 624.046

**С.Л. Блюмин, В.В. Зверев,
И.В. Сотникова, А.С. Сысоев**

ФГБОУ ВПО «ЛГТУ»

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ СЖАТО- ИЗГИБАЕМЫХ ЖЕСТКО ОПЕРТЫХ СТЕРЖНЕЙ ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТИ*

Рассмотрена и решена задача, относящаяся к устойчивости сжато-изгибаемых стержней переменной жесткости (с уменьшенной жесткостью в средней части), жестко опертых по концам. Получена система трансцендентных уравнений. Корни системы определяют критическую нагрузку, при которой произойдет потеря устойчивости стержня.

Ключевые слова: устойчивость, переменная жесткость, стержень, сжатие с изгибом, критическая сила, система, нелинейные алгебраические уравнения, численные методы.

В прогрессе строительной отрасли первостепенное значение имеет развитие производства наиболее экономически выгодных видов конструкций, к которым в значительной степени относятся легкие металлические конструкции из тонкостенных холодногнутых профилей. Объем строительства зданий и сооружений различного назначения с несущими элементами из тонкостенных холодногнутых профилей постоянно увеличивается, что обусловлено рядом преимуществ

**S.L. Blyumin, V.V. Zverev,
I.V. Sotnikova, A.S. Sysoev**

LGTU

SOLVING THE STABILITY PROBLEM OF COMPRESSED- BENDABLE PINNED RIGID RODS OF VARIABLE RIGIDITY*

The problem connected with the stability of compressed-bendable rigid rods of variable rigidity (with the reduced rigidity in the centre) is formulated and solved. The system of transcendent equations with roots for critical load for a rod is founded out.

Key words: stability, variable rigidity, rod, bent compression, ultimate force, system of nonlinear algebraic equations, numerical methods.

As for the progress in building and construction industry the main dimension is the development of cost-effective constructions which primarily include thin-walled cold-formed profiles. The building quantity of different structures and buildings with thin-walled cold-formed profile support elements is constantly increasing due to several advantages of this roll type [1—5].

However, despite the widespread use of cold formed profiles and constructions based on them, the recommendations for the analysis of such constructions are not represented in the national design and building standards.

* Работа поддержана Министерством образования и науки Российской Федерации в рамках перечня научно-исследовательских работ базовой части государственного задания, проект № 970.

* The research was supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation within the list of research works of the basic unit of the State order, project no. 970.

этого вида проката [1—5]. Однако, несмотря на широкое применение холодноформованных профилей и конструкций на их основе, отечественные нормы проектирования и строительства не содержат рекомендаций для расчета такого вида конструкций.

На работу рамных конструкций из холодноформованных профилей значительное влияние оказывает явление потери устойчивости. В достаточной степени не исследована действительная работа стержней из холодногнутых профилей, усиленных фасонками из стали [2—9].

Целью исследования является получение системы трансцендентных уравнений для сжато-изгибаемого жестко опертого стержня с переменной жесткостью, решение которой будет служить критерием потери устойчивости.

Рассмотрим решение задачи устойчивости сжатого стержня переменной жесткости, шарнирно опертого по концам [10]. На рисунке представлен стержень, состоящий из трех частей. Крайние части длиной l_1 и l_3 имеют жесткость EI_1 , а средняя длиной l_2 имеет жесткость EI_2 , причем $I_2 > I_1$.

The characteristics of the cold-formed profile frame constructions are much influenced by the buckling phenomenon in the process of its use. The real characteristics of the cold-formed profile rods, reinforced by corner steel plates are not sufficiently investigated [2—9].

The study is intended to obtain a system of transcendental equations for a compressed-bendable rigid rod of variable rigidity, the solution of which will be considered as buckling criterion.

Let us consider the solution of the stability problem for a variable rigid pin-ended rod [10].

Figure depicts a rod composed of three parts. The end parts with the length of l_1 and l_3 have a rigidity EI_1 and the middle part with the length of l_2 has a rigidity EI_2 , and $I_2 > I_1$.

Расчетная схема стержня переменной жесткости, жестко-опертого по концам

Calculated scheme of the variable rigid pin-ended rod

Составим дифференциальное уравнение изогнутой оси для каждой части.

Будем отсчитывать координату x_1 от конца стржня O , а x_2, x_3 — от точки сопряжения участков. Уравнения будут иметь вид

$$\begin{cases} EI_1 \frac{d^2 v_1}{dx_1^2} + P v_1 = -\frac{M}{l_1} x_1; \\ EI_2 \frac{d^2 v_2}{dx_2^2} + P v_2 = -\frac{M}{l_2} x_2; \\ EI_1 \frac{d^2 v_3}{dx_3^2} + P v_3 = -\frac{M}{l_3} x_3. \end{cases} \quad (1)$$

Введем обозначения $\frac{P}{EI_1} = k_1^2$, $\frac{P}{EI_2} = k_2^2$, $\frac{M}{EI_1} = j_1^2$, $\frac{M}{EI_2} = j_2^2$.
Запишем интегралы уравнений системы:

Let us construct a differential equation of the bent axis for each part. We will measure the coordinate x_1 from the end of the rod O , and x_2, x_3 — from the point of conjugation sites. The equations will be the following:

Let us introduce the notations $\frac{P}{EI_1} = k_1^2$, $\frac{P}{EI_2} = k_2^2$, $\frac{M}{EI_1} = j_1^2$, $\frac{M}{EI_2} = j_2^2$ and write the equation integrals of the system:

$$\begin{cases} v_1 = A \sin k_1 x_1 + B \cos k_1 x_1 - \frac{j_1^2}{k_1^2} \frac{x_1}{l_1}; \\ v_2 = C \sin k_2 x_2 + D \cos k_2 x_2 - \frac{j_2^2}{k_2^2} \frac{x_2}{l_2}; \\ v_3 = F \sin k_1 x_3 + G \cos k_1 x_3 - \frac{j_1^2}{k_1^2} \frac{x_3}{l_3}. \end{cases} \quad (2)$$

Выпишем граничные условия по концам и в точках сопряжения участков:

$$\begin{aligned} v_1 &= 0 \text{ при } x_1 = 0; \\ \frac{dv_1}{dx_1} &= 0 \text{ при } x_1 = 0; \\ \frac{dv_1}{dx_1} &= \frac{dv_2}{dx_2} \text{ при } x_1 = l_1 \text{ и } x_2 = 0; \\ v_3 &= 0 \text{ при } x_3 = l_3; \\ \frac{dv_2}{dx_2} &= \frac{dv_3}{dx_3} \text{ при } x_2 = l_2 \text{ и } x_3 = 0; \\ \frac{dv_3}{dx_3} &= 0 \text{ при } x_3 = l_3. \end{aligned} \quad (3)$$

Let us write out the boundary conditions at the ends and at the points of conjugation of the areas:

$$\begin{aligned} v_1 &= 0 \text{ for } x_1 = 0; \\ \frac{dv_1}{dx_1} &= 0 \text{ for } x_1 = 0; \\ \frac{dv_1}{dx_1} &= \frac{dv_2}{dx_2} \text{ for } x_1 = l_1 \text{ and } x_2 = 0; \\ v_3 &= 0 \text{ for } x_3 = l_3; \\ \frac{dv_2}{dx_2} &= \frac{dv_3}{dx_3} \text{ for } x_2 = l_2 \text{ and } x_3 = 0; \\ \frac{dv_3}{dx_3} &= 0 \text{ for } x_3 = l_3. \end{aligned} \quad (3)$$

Учитывая условия (3) и системы (1)—(2), получаем следующую неоднородную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} B = 0; \\ Ak_1 = \frac{j_1^2}{k_1^2 l_1}; \\ Ak_1 \cos k_1 l_1 - Bk_1 \sin k_1 l_1 - \frac{j_1^2}{k_1^2} \frac{1}{l_1} = Ck_2 - \frac{j_2^2}{k_2^2} \frac{1}{l_2}; \\ F \sin k_1 l_3 + G \cos k_1 l_3 - \frac{j_1^2}{k_1^2} = 0; \\ Ck_2 \cos k_2 l_2 - Dk_2 \sin k_2 l_2 - \frac{1}{l_2} \frac{j_2^2}{k_2^2} = Fk_1 - \frac{1}{l_3} \frac{j_1^2}{k_1^2}; \\ Fk_1 \cos k_1 l_3 - Gk_1 \sin k_1 l_3 - \frac{j_1^2}{k_1^2} \frac{1}{l_3} = 0. \end{array} \right. \quad (4)$$

Определение постоянных интегрирования из граничных условий задачи приводит к неоднородной системе линейных уравнений (4). В рассмотренной ранее авторами задаче устойчивости сжатого стержня переменной жесткости, шарнирно опертого по концам, приведенной в [20], при подобном переходе возникала однородная система линейных уравнений, критерием существования нетривиального решения которой выступало равенство определителя матрицы системы нулю.

В случае же системы (4) аналогом такого критерия может выступать система равенств нулю определителя матрицы системы и определителей, полученных поочередной заменой столбцов матрицы системы столбцом свободных членов. Однако при таком подходе мы не гарантируем и отсутствие решений у системы. Но в данной практической задаче гарантией наличия нетривиальных решений будет выступать проверка разрешимости системы (4) при полученных численно значениях искомых параметров [10, 12—14].

Considering the conditions (3) and the systems (1)—(2), we obtain the following inhomogeneous system of linear algebraic equations:

Determination of the integration constants of the boundary conditions of the problem leads to a system of inhomogeneous linear equations (4). In the previous research on solving the problem of the resistance of compressed-bent rods with step inflexibility change [20] there was a system of homogeneous linear equations. The criterion of the existence of a nontrivial solution was the equality of a system matrix determinant to zero.

In the case of (4) the system of equality to zero for the system matrix determinant and the determinants produced by alternate substitution of matrix columns with a column of constant terms could be used as an analogue. However using this scheme we could not guarantee that system has no solutions in general. But in the problem under consideration the existence of nontrivial solutions will be determined by a control of a solubility of the system (4) for the coefficients obtained numerically [10, 12—14].

Применяя описанный подход к системе (4), перейдем к системе трансцендентных уравнений:

$$\left\{ \begin{aligned} &k_1 k_2 \sin(k_2 l_2) \cos^2(k_1 l_3) + k_1 k_2 \sin(k_2 l_2) \sin^2(k_1 l_3) = 0; \\ &- (j_1^2 k_2^2 l_1 l_2 \cos(k_1 l_3) - j_1^2 k_2^2 l_1 l_2 \cos^2(k_1 l_3) + j_2^2 k_1^2 l_1 l_3 \cos^2(k_1 l_3) - \\ &- j_1^2 k_2^2 l_1 l_2 \sin^2(k_1 l_3) + j_2^2 k_1^2 l_1 l_3 \sin^2(k_1 l_3) - j_2^2 k_1^2 l_1 l_3 \cos^2(k_1 l_3) \cos(k_2 l_2) + \\ &+ j_1^2 k_2^2 l_2 l_3 \cos^2(k_1 l_3) \cos(k_2 l_2) - j_2^2 k_1^2 l_1 l_3 \cos(k_2 l_2) \sin^2(k_1 l_3) + \\ &+ j_1^2 k_2^2 l_2 l_3 \cos(k_2 l_2) \sin^2(k_1 l_3) - j_1^2 k_2^2 l_2 l_3 \cos(k_1 l_1) \cos(k_2 l_2) \sin^2(k_1 l_3) + \\ &+ j_1^2 k_1 k_2^2 l_1 l_2 l_3 \sin(k_1 l_3) - j_1^2 k_2^2 l_2 l_3 \cos(k_1 l_1) \cos^2(k_1 l_3) \cos(k_2 l_2)) / (k_1 k_2^2 l_1 l_2 l_3) = 0; \\ &(j_1^2 k_2 \sin(k_2 l_2) (\cos(k_1 l_3) + k_1 l_3 \sin(k_1 l_3))) / (k_1^2 l_3) = 0; \\ &- (j_1^2 k_2 \sin(k_2 l_2) (\sin(k_1 l_3) + k_1 l_3 \cos(k_1 l_3))) / (k_1^2 l_3) = 0. \end{aligned} \right. \quad (5)$$

Корни системы трансцендентных уравнений (5) определяют критическую нагрузку, при которой произойдет потеря устойчивости стержня. Следует отметить, что отыскание корней системы (5) производилось численно в программной среде Matlab.

Расчет конструкций на устойчивость опирается на понятие расчетной длины стержня. Под этим понимается длина полуволны изгиба при потере устойчивости или же шарнирно опертого стержня той же жесткости, эквивалентного по устойчивости рассматриваемым [12—20].

Исходя из этого и предположения абсолютной применимости закона Гука, эквивалентный по устойчивости шарнирно опертый стержень, как и рассматриваемый жестко опертый, имеет эйлерову критическую силу

$$N = \frac{\pi^2 EI}{l_0^2}, \quad (6)$$

где E — модуль упругости материала; I — момент инерции сечения; l_0 — расчетная длина стержня.

Из условия эквивалентности стержней находим для расчетной длины формулу

Using the defined approach we could construct the following system:

The roots of transcendental equations system (5) determine the critical load at which the rod buckling occurs. It should be noted that finding the roots of the system (4) was made numerically in Matlab software system.

The structural stability analysis is based on the calculated rod length. It is understood as the bent half-wavelength in case of buckling or the length of the hinged rod of the same rigidity with the stability equal to the one under consideration [12—20].

On the assumption of the absolute validity of Hooke's law both the considered rod and the hinged one have the following Euler load:

where E is the modulus of elasticity of the material; I — the second moment of area; l_0 — the calculated length of a rod.

Basing on the rods equivalence the calculated length is given by:

$$l_0 = \pi \sqrt{\frac{EI}{N_k}}, \quad (7)$$

где N_k — критическая сила, определяемая по формуле (6).

Установленная связь между критической силой и расчетной длиной стержня является основой для уточнения системы норм и разработки рекомендаций для расчета конструкций, в основе которых присутствуют сжато-изгибаемые жестко опертые стержни переменной жесткости.

where N_k — the critical load, defined by (6).

Thus, the established connection between the critical load and the calculated length of the rod is a basis for the specification of rules and the development of recommendations for calculating the constructions, which have compressed-bendable rigid rods of variable rigidity in their structure.

Библиографический список

1. Айрумян Э.Л., Каменщиков Н.И., Липленко М.А. Перспективы ЛСТК в России // СтройПРОФИ. 2013. № 10. С. 12—17.
2. Зверев В.В., Жидков К.Е., Семенов А.С., Сотникова И.В. Экспериментальные исследования рамных конструкций из холодногнутых профилей повышенной жесткости // Научный вестник Воронежского государственного архитектурно-строительного университета. Строительство и архитектура. 2011. № 4 (24). С. 20—25.
3. Айрумян Э.Л. Рекомендации по расчету стальных конструкций из тонкостенных гнутых профилей // СтройПРОФИль. 2009. № 8 (78). С. 12—14.
4. Айрумян Э.Л. Особенности расчета стальных конструкций из тонкостенных гнутых профилей // Монтажные и специальные работы в строительстве. 2008. № 3. С. 2—7.
5. Luza G., Robra J. Design of Z-purlins: Part 1. Basics and cross-section values according to EN 1993-1-3 // Proceedings of the 5th European Conference on Steel and Composite Structures EUROSTEEL, Graz, Austria, 2008. Vol. A. Pp. 129—134.
6. Luza G., Robra J. Design of Z-purlins: Part 2. Design methods given in Eurocode EN 1993-1-3 // Proceedings of the 5th European Conference on Steel and Composite Structures EUROSTEEL, Graz, Austria, 2008. Vol. A. Pp. 135—140.

References

1. Ayrumyan E.L., Kamenshchikov N.I., Liplenko M.A. Perspektivy LSTK v Rossii [Prospects of Steel Frames in Russia]. *Stroy-PROFI* [Construction Prof]. 2013, no. 10, pp. 12—17. (In Russian)
2. Zverev V.V., Zhidkov K.E., Semenov A.S., Sotnikova I.V. Eksperimental'nye issledovaniya ramnykh konstruktсий iz kholodnogutykh profiley povyshennoy zhestkosti [Experimental Studies of Frame Constructions Produced of Cold-Formed Profiles of Increased Rigidity]. *Nauchnyy vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo arkhitekturno-stroitel'nogo universiteta. Stroitel'stvo i arkhitektura* [Bulletin of Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering. Construction and Architecture]. 2011, no. 4 (24), pp. 20—25. (In Russian)
3. Ayrumyan E.L. Rekomendatsii po raschetu stal'nykh konstruktсий iz tonkostennykh gnutyykh profiley [Recommendations for Calculating Steel Constructions Produced of Thin-Walled Roll-Formed Profiles]. *Stroy-PROFI'* [Construction Profile]. 2009, no. 8 (78), pp. 12—14. (In Russian)
4. Ayrumyan E.L. Osobennosti rascheta stal'nykh konstruktсий iz tonkostennykh gnutyykh profiley [Features of Calculation for Steel Thin-Walled Roll-Formed Shapes]. *Montazhnye i spetsial'nye raboty v stroitel'stve* [Installation and Special Works in Construction]. 2008, no. 3, pp. 2—7. (In Russian)
5. Luza G., Robra J. Design of Z-purlins: Part 1. Basics and Cross-Section Values Ac-

7. Смазнов Д.Н. Устойчивость при сжатии составных колонн, выполненных из профилей из высокопрочной стали // Инженерно-строительный журнал. 2009. № 3. С. 42—49.

8. Yu W.-W., LaBoube R.A. Cold-Formed Steel Design. 4th Edition. John Wiley & Sons, 2010. 512 p.

9. Тимошенко С.П., Григолюк Э.И. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. М. : Наука, 1971. 807 с.

10. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. М. : Физматлит, 1972. 879 с.

11. Галкин А.В., Сысоев А.С., Сотникова И.В. Задача устойчивости сжато-изгибаемых стержней со ступенчатым изменением жесткости // Вестник МГСУ. 2015. № 2. С. 38—44.

12. Горбачев В.И., Москаленко О.Б. Устойчивость стержней с переменной жесткостью при сжатии распределенной нагрузкой // Вестник Московского университета. Серия 1, Математика. Механика. 2012. № 1. С. 41—47.

13. Темис Ю.М., Федоров И.М. Сравнение методов анализа устойчивости стержней переменного сечения при неконсервативном нагружении // Проблемы прочности и пластичности. 2006. Вып. 68. С. 95—106.

14. Гукова М.И., Симон Н.Ю., Святошенко А.Е. Вычисление расчетных длин сжатых стержней с учетом их совместной работы // Строительная механика и расчет сооружений. 2012. № 3. С. 43—47.

15. Солдатов А.Ю., Лебедев В.Л., Семенов В.А. Анализ устойчивости стальных стержневых систем с учетом нелинейной диаграммы деформирования материала // Строительная механика и расчет сооружений. 2012. № 2. С. 48—52.

16. Солдатов А.Ю., Лебедев В.Л., Семенов В.А. Анализ устойчивости строительных конструкций с учетом физической нелинейности методом конечных элементов // Строительная механика и расчет сооружений. 2011. № 6. С. 60—65.

cording to EN 1993-1-3. Proceedings of the 5th European Conference on Steel and Composite Structures EUROSTEEL. Graz, Austria, 2008, vol. A, pp. 129—134.

6. Luza G., Robra J. Design of Z-purlins: Part 2. Design Methods Given in Eurocode EN 1993-1-3. Proceedings of the 5th European Conference on Steel and Composite Structures EUROSTEEL. Graz, Austria, 2008, vol. A, pp. 135—140.

7. Smaznov D.N. Ustoychivost' pri szhatii sostavnykh kolonn, vypolnennykh iz profiley iz vysokoprochnoy stali [Stability in Compression of Composite Columns Made of High-Strength Steel Profiles]. *Inzhenerno-stroitel'nyy zhurnal* [Magazine of Civil Engineering]. 2009, no. 3, pp. 42—49. (In Russian)

8. Yu W.-W., LaBoube R.A. Cold-Formed Steel Design. 4th Edition, John Wiley & Sons, 2010, 512 p.

9. Timoshenko S.P., Grigolyuk E.I. *Ustoychivost' sterzhney, plastin i obolochek* [Stability of Rods, Plates and Shells]. Moscow, Nauka Publ., 1971, 807 p. (In Russian)

10. Vol'mir A.S. *Ustoychivost' uprugikh system* [Stability of Elastic Systems]. Moscow, Fizmatlit Publ., 1972, 879 p. (In Russian)

11. Galkin A.V., Sysoev A.S., Sotnikova I.V. Zadacha ustoychivosti szhato-izgibayemykh sterzhney so stupenchatym izmeneniem zhestkosti [The Resistance Problem of Compressed-Bent Shanks with Step Inflexibility Change]. *Vestnik MGSU* [Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering]. 2015, no. 2, pp. 38—44. (In Russian)

12. Gorbachev V.I., Moskalenko O.B. Ustoychivost' sterzhney s peremennoy zhestkost'yu pri szhatii raspredelennoy nagruzkoj [Stability of the Rods with Variable Inflexibility While Pressing with Distributed Load]. *Vestnik Moskovskogo universitetata. Seriya 1, Matematika. Mekhanika* [Bulletin of the Moscow State University. Series 1. Mathematics, Mechanics]. 2012, no. 1, pp. 41—47. (In Russian)

13. Temis Yu.M., Fedorov I.M. Sravnenie metodov analiza ustoychivosti sterzhney peremennogo secheniya pri nekonservativnom nagruzenii [Comparing the Analysis Methods of the Stability of Rods with Variable Cut Set at Nonconservative Loading]. *Problemy proch-*

17. Крутий Ю.С. Задача Эйлера в случае непрерывной поперечной жесткости (продолжение) // Строительная механика и расчет сооружений. 2011. № 2. С. 27—33.

18. Сливкер В.И. Устойчивость стержня под действием сжимающей силы с фиксированной линией действия // Строительная механика и расчет сооружений. 2011. № 2. С. 34—36.

19. Насонкин В.Д. Предельная нагрузка для сжатых стержней, деформируемых за пределом упругости // Строительная механика и расчет сооружений. 2007. № 2. С. 24—28.

20. Потапов А.В. Устойчивость стальных стержней открытого профиля с учетом реальной работы материала // Известия Казанского государственного архитектурно-строительного университета. 2009. № 1 (11). С. 112—115.

Поступила в редакцию в мае 2015 г.

Об авторах: **Блюмин Семен Львович** — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры прикладной математики, **Липецкий государственный технический университет (ФГБОУ ВПО «ЛГТУ»)**, 398600, г. Липецк, ул. Московская, д. 30, 8 (4742) 32-80-50, kaf-pm@stu.lipetsk.ru;

Зверев Виталий Валентинович — доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой металлических конструкций, **Липецкий государственный технический университет (ФГБОУ ВПО «ЛГТУ»)**, 398600, г. Липецк, ул. Московская, д. 30, 8 (4742) 32-80-79, kaf-mk@stu.lipetsk.ru;

Сотникова Ирина Владимировна — аспирант кафедры металлических конструкций, **Липецкий государственный технический университет (ФГБОУ ВПО «ЛГТУ»)**, 398600, г. Липецк, ул. Московская, д. 30, 8 (4742) 32-80-79, i.sotnikowa@yandex.ru;

Сысоев Антон Сергеевич — кандидат технических наук, доцент кафедры

nosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]. 2006, no. 68, pp. 95—106. (In Russian)

14. Gukova M.I., Simon N.Yu., Svyatoshenko A.E. Vychislenie raschetnykh dlin szhatykh sterzhney s uchetom ikh sovmestnoy raboty [Calculation of the Lengths of Compressed Rods with Account for their Joint Action]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy* [Construction Mechanics and Calculation of Structures]. 2012, no. 3, pp. 43—47. (In Russian)

15. Soldatov A.Yu., Lebedev V.L., Semenov V.A. Analiz ustoychivosti stal'nykh sterzhnevnykh sistem s uchetom nelineynoy diagrammy deformirovaniya materiala [Stability Analysis of Steel Rod Systems Taking into Account the Non-Linear Diagram of Material Deformation]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy* [Construction Mechanics and Calculation of Structures]. 2012, no. 2, pp. 48—52. (In Russian)

16. Soldatov A.Yu., Lebedev V.L., Semenov V.A. Analiz ustoychivosti stroitel'nykh konstruktsey s uchetom fizicheskoy nelineynosti metodom konechnykh elementov [Stability Analysis of Building Structures Taking into Account the Physical Non-Linearity Using Finite Element Method]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy* [Construction Mechanics and Calculation of Structures]. 2011, no. 6, pp. 60—65. (In Russian)

17. Krutiy Yu.S. Zadacha Eylera v sluchae nepreryvnoy poperechnoy zhestkosti (prodolzhenie) [Euler Problem in Case of Constant Transverse Inflexibility (Continuation)]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy* [Construction Mechanics and Calculation of Structures]. 2011, no. 2, pp. 27—33. (In Russian)

18. Slivker V.I. Ustoychivost' sterzhnya pod deystviem szhimayushchey sily s fiksirovannoy liniey deystviya [Stability of a Rod under the Influence of Comprehensive Load with Fixed Force Line]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy* [Construction Mechanics and Calculation of Structures]. 2011, no. 2, pp. 34—36. (In Russian)

19. Nasonkin V.D. Predel'naya nagruzka dlya szhatykh sterzhney, deformiruemykh za predelom uprugosti [Ultimate Load for Com-

прикладной математики, **Липецкий государственный технический университет (ФГБОУ ВПО «ЛГТУ»)**, 398600, г. Липецк, ул. Московская, д. 30, 8 (4742) 32-80-51, anton_syssoyev@mail.ru.

Для цитирования: Блюмин С.Л., Зверев В.В., Сотникова И.В., Сысоев А.С. Решение задачи устойчивости сжато-изгибаемых жестко опертых стержней переменной жесткости // Вестник МГСУ. 2015. № 5. С. 18—26.

pressed Rods Deformable outside the Limit of Elasticity]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy* [Construction Mechanics and Calculation of Structures]. 2007, no. 2, pp. 24—28. (In Russian)

20. Potapov A.V. Ustoychivost' stal'nykh sterzhney otkrytogo profilya s uchetom real'noy raboty materiala [Stability of Steel Rods with Open Profile Taking into Account the Real Operation of the Material]. *Izvestiya Kazanskogo gosudarstvennogo arkhitekturno-stroitel'nogo universiteta* [Bulletin of Kazan State University of Architecture and Engineering]. 2009, no. 1 (11), pp. 112—115. (In Russian)

Received in May 2015.

About the authors: **Blyumin Semen L'vovich** — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Department of Applied Mathematics, **Lipetsk State Technical University (LGTU)**, 30 Moskovskaya str., Lipetsk, 398600, Russian Federation; +7 (4742) 32-80-50, kaf-pm@stu.lipetsk.ru;

Zverev Vitaliy Valentinovich — Doctor of Technical Sciences, Professor, chair, Department of Metal Structures, **Lipetsk State Technical University (LGTU)**, 30 Moskovskaya str., Lipetsk, 398600, Russian Federation; +7 (4742) 32-80-79, kaf-mk@stu.lipetsk.ru;

Sotnikova Irina Vladimirovna — postgraduate student, Department of Metal Structures, **Lipetsk State Technical University (LGTU)**, 30 Moskovskaya str., Lipetsk, 398600, Russian Federation; +7 (4742) 32-80-79; i.sotnikova@yandex.ru;

Syssoev Anton Sergeevich — Candidate of Technical Sciences, Assistant Lecturer, Department of Applied Mathematics, **Lipetsk State Technical University (LGTU)**, 30 Moskovskaya str., Lipetsk, 398600, Russian Federation; +7 (4742) 32-80-51; anton_syssoyev@mail.ru.

For citation: Blyumin S.L., Zverev V.V., Sotnikova I.V., Syssoev A.S. Reshenie zadachi ustoychivosti szhato-izgibaemykh zhestko-opertykh sterzhney peremennoy zhestkosti [Solving the Stability Problem of Compressed-Bendable Pinned Rigid Rods of Variable Rigidity]. *Vestnik MGSU* [Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering]. 2015, no. 5, pp. 18—26.