УДК 539.3

Т.Н. Бобылева

ФГБОУ ВПО «МГСУ»

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕЗОНАНСНЫХ ЧАСТОТ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПОЛОГО ШАРА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ТРЕХМЕРНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Получено уравнение для определения резонансных частот осесимметричных колебаний полого изотропного упругого шара. Использовано общее решение векторного уравнения движения трехмерной теории упругости в сферической системе координат. Частотные уравнения чисто радиальных колебаний сплошного и полого шара, имеющиеся в литературе, даны как частные случаи.

Ключевые слова: резонансная частота, собственная частота, полый изотропный шар, осесимметричные колебания, уравнения движения, трехмерная теория упругости.

Существует большое количество работ о колебаниях тел сферической формы. Например, колебания полых шаров изучались в [1—11], сферических оболочек — в [12—21]. В данной статье решение задачи о резонансных колебаниях полого изотропного шара строится на основе полной системы трехмерных уравнений теории упругости. Оно может быть использовано в граничных задачах для произвольно нагруженных пространственных тел, все три измерения которых примерно одинаковы, в динамических задачах для высокочастотных колебаний.

В строительстве широко используются полые шары, поэтому большую важность имеет изучение динамики таких тел, в частности, их резонансных колебаний.

Векторное уравнение движения в перемещениях трехмерной теории упругости — уравнение Ламе для однородной упругой изотропной среды имеет вид [22, 23]

$$2 \frac{m-1}{m-2} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} = \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad (1)$$

где m — число Пуассона; $\mathbf{u}$ — вектор упругих перемещений; ρ — плотность материала; G — модуль сдвига; t — координата времени.

Формулы общего решения динамических задач теории упругости в сферической системе координат (r, θ, φ) записываются в виде векторного разложения Ламе [23]. В случае простых гармонических колебаний во времени с круговой частотой ω решение уравнения (1) представляется в виде [23]

$$\mathbf{u} = e^{i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-n}^{k=n} \left[u_n^{(k)}(r, \omega) \mathbf{L}_n^{(k)}(\theta, \varphi) + v_n^{(k)}(r, \omega) \mathbf{M}_n^{(k)}(\theta, \varphi) + w_n^{(k)}(r, \omega) \mathbf{N}_n^{(k)}(\theta, \varphi) \right],$$

где векторные гармоники обозначены как $\mathbf{L}_n^{(k)}(\theta, \varphi)$, $\mathbf{M}_n^{(k)}(\theta, \varphi)$, $\mathbf{N}_n^{(k)}(\theta, \varphi)$.

После подстановки этого разложения в уравнение движения для неизвестных радиальных функций $u_n^{(k)}(r, \omega)$, $v_n^{(k)}(r, \omega)$, $w_n^{(k)}(r, \omega)$ получается система обыкновенных дифференциальных уравнений, решение которой находится в функциях Бесселя полуцелого индекса [23]

$$\begin{aligned}\bar{u}_n^{(k)}(r, \omega) &= \frac{A_n^{(k)}}{k_1^2} \frac{d}{dr} \left(r^{-\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(k_1 r) \right) + \frac{B_n^{(k)}}{k_1^2} \frac{d}{dr} \left(r^{-\frac{1}{2}} J_{-n-\frac{1}{2}}(k_1 r) \right) + \\ &+ \frac{C_n^{(k)}}{k_2^2} r^{-\frac{3}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(k_2 r) + \frac{D_n^{(k)}}{k_2^2} r^{-\frac{3}{2}} J_{-n-\frac{1}{2}}(k_2 r); \\ n(n+1) \bar{v}_n^{(k)}(r, \omega) &= \frac{n(n+1)}{k_1^2} A_n^{(k)} r^{-\frac{3}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(k_1 r) + \frac{n(n+1)}{k_1^2} B_n^{(k)} r^{-\frac{3}{2}} J_{-n-\frac{1}{2}}(k_1 r) + (2) \\ &+ \frac{C_n^{(k)}}{k_2^2} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r^{\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(k_2 r) \right) + \frac{D_n^{(k)}}{k_2^2} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r^{\frac{1}{2}} J_{-n-\frac{1}{2}}(k_2 r) \right); \\ n(n+1) \bar{w}_n^{(k)}(r, \omega) &= r^{-\frac{1}{2}} \left(M_n^{(k)} J_{n+\frac{1}{2}}(k_2 r) + N_n^{(k)} J_{-n-\frac{1}{2}}(k_2 r) \right),\end{aligned}$$

где $k_1 = \frac{\omega}{c_1}$; $k_2 = \frac{\omega}{c_2}$; $c_1 = \sqrt{\frac{2G(m-1)}{\rho(m-2)}}$ — скорость волны сжатия; $c_2 = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$ —

скорость волны сдвига; $A_n^{(k)}$, $B_n^{(k)}$, $C_n^{(k)}$, $D_n^{(k)}$, $M_n^{(k)}$, $N_n^{(k)}$ — постоянные интегрирования. Третья формула в (2), необходимая для описания крутильно-сдвиговых колебаний, дальше не рассматривается. Пусть на граничных поверхностях заданы нулевые значения компонент напряжений $\sigma_r(\theta, \varphi)$ и $\sigma_{r\theta}(\theta, \varphi)$. Подставляя радиальные функции (2) в данные граничные условия, записанные в виде

$$\begin{aligned}\left[\frac{1}{m-2} \left(\frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 u_n^{(k)})}{dr} - \frac{n(n+1)}{r} v_n^{(k)} \right) + \frac{du_n^{(k)}}{dr} \right]_{r=r_j} &= 0; \\ \left[r \frac{d}{dr} \left(\frac{v_n^{(k)}}{r} \right) + \frac{u_n^{(k)}}{r} \right]_{r=r_j} &= 0,\end{aligned}$$

где $j = 0, 1$ и $r_0 = r$, $r_1 = R$ (r и R — соответственно радиусы внутренней и внешней граничных сфер). В результате получаем систему четырех однородных алгебраических уравнений относительно постоянных интегрирования $A_n^{(k)}$, $B_n^{(k)}$, $C_n^{(k)}$, $D_n^{(k)}$:

$$\begin{aligned}\left[\frac{1}{k_1^2} \frac{d^2}{dr^2} \left(r^{-\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(k_1 r) \right) - \frac{1}{m-2} r^{-\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(k_1 r) \right]_{r=r_j} A_n^{(k)} + \\ + \left[\frac{1}{k_1^2} \frac{d^2}{dr^2} \left(r^{-\frac{1}{2}} J_{-n-\frac{1}{2}}(k_1 r) \right) - \frac{1}{m-2} r^{-\frac{1}{2}} J_{-n-\frac{1}{2}}(k_1 r) \right]_{r=r_j} B_n^{(k)} + \\ + \left[\frac{1}{k_2^2} \frac{d}{dr} \left(r^{-\frac{3}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(k_2 r) \right) \right]_{r=r_j} C_n^{(k)} + \left[\frac{1}{k_2^2} \frac{d}{dr} \left(r^{-\frac{3}{2}} J_{-n-\frac{1}{2}}(k_2 r) \right) \right]_{r=r_j} D_n^{(k)} = 0;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[\frac{n(n+1)}{k_1^2} \frac{d}{dr} \left(r^{-\frac{3}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(k_1 r) \right) \right]_{r=r_j} A_n^{(k)} + \left[\frac{n(n+1)}{k_1^2} \frac{d}{dr} \left(r^{-\frac{3}{2}} J_{-n-\frac{1}{2}}(k_1 r) \right) \right]_{r=r_j} \times \\ & \times B_n^{(k)} + \left[\frac{1}{k_2^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r^{\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(k_2 r) \right) \right) + \frac{1}{2} r^{-\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(k_2 r) \right]_{r=r_j} C_n^{(k)} + \\ & + \left[\frac{1}{k_2^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r^{\frac{1}{2}} J_{-n-\frac{1}{2}}(k_2 r) \right) \right) + \frac{1}{2} r^{-\frac{1}{2}} J_{-n-\frac{1}{2}}(k_2 r) \right]_{r=r_j} D_n^{(k)} = 0. \end{aligned}$$

Те значения круговой частоты ω , для которых главный определитель этой системы обращается в нуль, являются резонансными частотами колебаний полого шара. Рассмотрим случай осесимметричных колебаний ($k=0$) и систему алгебраических уравнений четвертого порядка, пусть в ней $r_0 = r$, $r_1 = R$. Тогда для определения резонансных частот имеем следующий определитель четвертого порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{vmatrix} = 0, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{(n+1)(n+2)}{k_1^2} r^{-\frac{5}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(k_1 r) - \frac{2}{k_1} r^{-\frac{3}{2}} J_{n-\frac{1}{2}}(k_1 r) - \frac{m-1}{m-2} r^{-\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(k_1 r); \\ a_{12} &= \frac{(n+1)(n+2)}{k_1^2} r^{-\frac{5}{2}} J_{-n-\frac{1}{2}}(k_1 r) + \frac{2}{k_1} r^{-\frac{3}{2}} J_{-n+\frac{1}{2}}(k_1 r) - \frac{m-1}{m-2} r^{-\frac{1}{2}} J_{-n-\frac{1}{2}}(k_1 r); \\ a_{13} &= -\frac{n+2}{k_2^2} r^{-\frac{5}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(k_2 r) + \frac{1}{k_2} r^{-\frac{3}{2}} J_{n-\frac{1}{2}}(k_2 r); \\ a_{14} &= -\frac{n+2}{k_2^2} r^{-\frac{5}{2}} J_{-n-\frac{1}{2}}(k_2 r) - \frac{1}{k_2} r^{-\frac{3}{2}} J_{-n+\frac{1}{2}}(k_2 r); \\ a_{21} &= -\frac{n(n+1)(n+2)}{k_1^2} r^{-\frac{5}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(k_1 r) + \frac{n(n+1)}{k_1} r^{-\frac{3}{2}} J_{n-\frac{1}{2}}(k_1 r); \\ a_{22} &= -\frac{n(n+1)(n+2)}{k_1^2} r^{-\frac{5}{2}} J_{-n-\frac{1}{2}}(k_1 r) - \frac{n(n+1)}{k_1} r^{-\frac{3}{2}} J_{-n+\frac{1}{2}}(k_1 r); \\ a_{23} &= \frac{n(n+2)}{k_2^2} r^{-\frac{5}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(k_2 r) - \frac{1}{k_2} r^{-\frac{3}{2}} J_{n-\frac{1}{2}}(k_2 r) - \frac{1}{2} r^{-\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(k_2 r); \\ a_{24} &= \frac{n(n+2)}{k_2^2} r^{-\frac{5}{2}} J_{-n-\frac{1}{2}}(k_2 r) + \frac{1}{k_2} r^{-\frac{3}{2}} J_{-n+\frac{1}{2}}(k_2 r) - \frac{1}{2} r^{-\frac{1}{2}} J_{-n-\frac{1}{2}}(k_2 r); \end{aligned} \quad (4)$$

($n = 0, 1, 2, \dots$), а b_{ij} ($i = 3, 4; j = 1, 2, 3, 4$) получаются из a_{ij} заменой r на R , например:

$$b_{31} = \frac{(n+1)(n+2)}{k_1^2} R^{-\frac{5}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(k_1 R) - \frac{2}{k_1} R^{-\frac{3}{2}} J_{n-\frac{1}{2}}(k_1 R) - \frac{m-1}{m-2} R^{-\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(k_1 R).$$

Из (7) имеем

$$M_{1212}M_{3434} - M_{1213}M_{3424} + M_{1214}M_{3423} + M_{1223}M_{3414} - \\ - M_{1224}M_{3413} + M_{1234}M_{3412} = 0. \quad (5)$$

M_{ijkl} — минор второго порядка, элементы которого находятся на пересечении строк с номерами i, l и столбцов с номерами k, l .

Далее обозначим для краткости:

$$n(n+2)(n-1) + k_2^2 r^2 = a, \quad n(n+2)(n-1) + k_2^2 R^2 = A;$$

$$(n+1)(n+2)(n-1) + dk_1^2 r^2 = f, \quad (n+1)(n+2)(n-1) + dk_1^2 R^2 = F;$$

$$r[k_2^2(n+1)(n+2) + 2dn(n+2)k_1^2 - dk_1^2 k_2^2 r^2] = h;$$

$$R[k_2^2(n+1)(n+2) + 2dn(n+2)k_1^2 - dk_1^2 k_2^2 R^2] = H;$$

$$n(n+1) - 2 = j; \quad d = \frac{m-1}{m-2};$$

$$B_1 = J_{n-\frac{1}{2}}(k_1 r) J_{-n+\frac{1}{2}}(k_1 R) - J_{-n+\frac{1}{2}}(k_1 r) J_{n-\frac{1}{2}}(k_1 R);$$

$$b_1 = J_{n+\frac{1}{2}}(k_2 r) J_{-n-\frac{1}{2}}(k_2 R) - J_{-n-\frac{1}{2}}(k_2 r) J_{n+\frac{1}{2}}(k_2 R);$$

$$B_2 = J_{n+\frac{1}{2}}(k_1 r) J_{-n+\frac{1}{2}}(k_1 R) + J_{-n+\frac{1}{2}}(k_1 r) J_{n-\frac{1}{2}}(k_1 R);$$

$$b_2 = J_{-n+\frac{1}{2}}(k_2 r) J_{n+\frac{1}{2}}(k_2 R) + J_{n-\frac{1}{2}}(k_2 r) J_{-n-\frac{1}{2}}(k_2 R);$$

$$B_3 = J_{-n+\frac{1}{2}}(k_1 r) J_{n-\frac{1}{2}}(k_1 R) - J_{n-\frac{1}{2}}(k_1 r) J_{-n+\frac{1}{2}}(k_1 R);$$

$$b_3 = J_{-n-\frac{1}{2}}(k_2 r) J_{n+\frac{1}{2}}(k_2 R) - J_{n+\frac{1}{2}}(k_2 r) J_{-n-\frac{1}{2}}(k_2 R);$$

$$B_4 = J_{n-\frac{1}{2}}(k_1 r) J_{-n-\frac{1}{2}}(k_1 R) + J_{-n+\frac{1}{2}}(k_1 r) J_{n+\frac{1}{2}}(k_1 R);$$

$$b_4 = J_{-n-\frac{1}{2}}(k_2 r) J_{n-\frac{1}{2}}(k_2 R) + J_{n+\frac{1}{2}}(k_2 r) J_{-n+\frac{1}{2}}(k_2 R);$$

$$B_5 = J_{n+\frac{1}{2}}(k_1 r) J_{-n-\frac{1}{2}}(k_1 R) - J_{-n-\frac{1}{2}}(k_1 r) J_{n+\frac{1}{2}}(k_1 R);$$

$$b_5 = J_{n-\frac{1}{2}}(k_2 r) J_{-n+\frac{1}{2}}(k_2 R) - J_{-n+\frac{1}{2}}(k_2 r) J_{n-\frac{1}{2}}(k_2 R);$$

$$B_6 = J_{-n-\frac{1}{2}}(k_1 r) J_{n+\frac{1}{2}}(k_1 R) - J_{n+\frac{1}{2}}(k_1 r) J_{-n-\frac{1}{2}}(k_1 R);$$

$$b_6 = J_{-n+\frac{1}{2}}(k_2 r) J_{n-\frac{1}{2}}(k_2 R) - J_{n-\frac{1}{2}}(k_2 r) J_{-n+\frac{1}{2}}(k_2 R).$$

Из (5) получается следующее уравнение для определения резонансных частот осесимметричных колебаний полого шара:

$$\pi^2 r R (2k_1^2 a A b_1 B_1 + 2k_1 k_2 f A b_2 B_2 + 2k_1^2 k_2 j A r b_3 B_3 + k_1 h A b_3 B_2 + \\ + 2k_1 k_2 a F b_4 B_4 + 2k_2^2 f F b_5 B_5 + 2k_1 k_2^2 j F r b_6 B_6 + k_2 h F b_4 B_6 + \\ + 2k_1^2 k_2 a j R b_4 B_1 + 2k_1 k_2^2 f j R b_5 B_2 + 2k_1^2 k_2^2 j^2 r R b_6 B_1 - k_1 k_2 h j R b_4 B_2 + \\ + k_1 a H b_1 B_4 + k_2 f H b_2 B_5 - k_1 k_2 j H r b_2 B_4 + 0,5 h H b_3 B_5) + 4n(n+1) \times \\ \times \left\{ (n+2)(n-1) \left[4k_1^2 d r^2 - 4(n+2)(n-1) + k_2^2 (r^2 + R^2) \right] - \right. \\ \left. - 2k_1^2 k_2^2 d r^2 R^2 \right\} = 0. \quad (6)$$

В последнем слагаемом использована формула [24] $J_v(z)J_{-v+1}(z) + J_{v-1}(z)J_{-v}(z) = \frac{2 \sin v\pi}{\pi z}$.

Из полученного уравнения для собственных частот (6) выводятся, как частные случаи, частотные уравнения радиальных колебаний сплошного и полого шаров, которые совпадают с уже имеющимися в литературе. Например, при $n = 0$ данное уравнение (с учетом того, что $J_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z$, $J_{-\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos z$ [24]) имеет вид $\left\{ k_1^2 \left[2d(R^2 + r^2) - 4rR - k_1^2 d^2 r^2 R^2 \right] - 4 \right\} \sin k_1(R-r) + 2k_1^2(R-r)(2 + k_1^2 drR) \cos k_1(R-r) = 0$, и если обозначить $k_1 = h$, $R = a$, $r = b$, $\frac{m-1}{2(m-2)} = \frac{1}{v}$, оно превращается в уравнение частот для полого шара, приведенное в [25],

$$\frac{vha + (h^2 a^2 - v) \operatorname{tg} ha}{(h^2 a^2 - v) - vha \operatorname{tg} ha} = \frac{vhb + (h^2 b^2 - v) \operatorname{tg} hb}{(h^2 b^2 - v) - vhb \operatorname{tg} hb}.$$

А при $n = 0$ и $r = 0$ из (6) получается уравнение для чисто радиальных колебаний сплошного шара [23] $\operatorname{tg}(k_1 R) = \frac{2(m-2)k_1 R}{2(m-2) - (m-1)k_1^2 R^2}$.

Библиографический список

1. Григоренко А.Я., Лоза И.А. Осесимметричные колебания полого неоднородного шара с пьезокерамическими слоями // Проблемы обчислювальної механіки і міцності конструкцій : збірник наукових праць. 2011. Вип. 15. С. 70—80.
2. Шульга Н.А. Радиальные электроупругие колебания пьезокерамического полого шара // Прикладная механика. 1990. Т. 26. № 8. С. 20—25.
3. Григоренко А.Я., Ефимова Т.Л., Шульга Н.А. Свободные неосесимметричные колебания трансверсально-изотропного полого шара // Доклады Академии наук Украинской ССР. 1986. Сер. А : Физико-математические и технические науки. № 2. С. 8—20.
4. Лоза И.А., Шульга Н.А. Осесимметричные колебания пьезокерамического полого шара при радиальной поляризации // Прикладная механика. 1984. Т. 20. № 2. С. 3—8.
5. Фриштер Л.Ю. Расчетно-экспериментальный метод исследования НДС составных конструкций в зонах концентрации напряжений // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2008. № 2. С. 20—27.
6. Лазуткин В.Н. Колебания полого пьезокерамического шара // Акустический журнал. 1971. Т. 17. Вып. 4. С. 588—592.
7. Петренко Т.П. Собственные колебания упругого полого шара в жидкости или газе // Известия Академии наук Армянской ССР. 1971. Т. 24. № 5. С. 37—46.
8. Sharma J.N., Sharma N. 3-D exact vibration analysis of a generalized thermoelastic hollow sphere with matrix frobenius method // World Journal of Mechanics. 2012. Vol. 2. Pp. 98—112.
9. Srinivas R., Rajashekar M.N., Sambaiah K. Radial vibrations in a micro-isotropic, micro-elastic hollow sphere // Int. J. Pure Appl. Sci. Technol. 2013. Vol. 15. No. 2. Pp. 54—61.

10. *Abd-Alla A.M.* Free Vibrations in a Spherical Non-Homogeneous Elastic Region // J. Comp. and Theor. Nanoscience. 2013. Vol. 10. No. 9. Pp. 1914—1920.
11. *Красненков М.А., Коршаковский С.И., Чекалкин Н.С.* Проблемы безопасности и надежности при изучении усталости элементов силовых конструкций авиационной и космической техники // Научный вестник Московского государственного технического университета гражданской авиации. 2014. Т. 208. С. 49—53.
12. *Культина Н.Ю., Новиков В.В.* О спектре собственных частот некоторого класса тонких упругих оболочек // Научни трудове на Русенския университет : сб. 2013. Т. 52. Сер. 2. С. 93—102.
13. *Борисейко В.А., Улитко А.Ф.* Электроупругие колебания толстостенной пьезо-керамической сферы // Тепловые напряжения в элементах конструкций. Доклады научного совещания. 1974. Вып. 14. С. 121—126.
14. *Фриштер Л.Ю., Мозгалева М.Л.* Сопоставление возможностей численного и экспериментального моделирования напряженно-деформированного состояния конструкций с учетом их геометрической нелинейности // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2010. Vol. 6. No. 1—2. Pp. 221—222.
15. *Гольденвейзер А.Л., Лидский Б.В., Товстик П.Е.* Свободные колебания тонких упругих оболочек. М. : Наука, 1979. 384 с.
16. *Naghdi P.M., Kalnins A.* On vibrations of elastic spherical shells // Trans. ASME. J. Appl. Mechanics. 1962. Vol. E29. No. 1. Pp. 65—72.
17. *Kabanov K.I., Kiryanova L.V.* Some aspects of modeling a random process of the spectral density method of canonical expansions // Integration processes and innovative technologies / Achievements and prospects of engineering sciences. Collection of scientific works. Kharkiv, 2012. 4 p.
18. *Шмаков В.П.* Избранные труды по гидроупругости и динамике упругих конструкций. М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. 287 с.
19. *Тимова Т.Н.* О нахождении нормального вида гамильтоновых матриц // Прикладная математика и механика. 1981. Т. 45. Вып. 6. С. 1026—1031.
20. *Kartashov G.D., Chiganova N.M.* Construction of control plans using a quantitative index with two-sided bounds // J. of Math. Sci. 1987. Vol. 39. No. 2. Pp. 2578—2588.
21. *Sharma J.N., Sharma D.K., Dhaliwal S.S.* Free vibration analysis of viscothermoelastic solid sphere // Int. J. of Appl. Math. and Mech. 2012. Vol. 8. No. 11. Pp. 45—68.
22. *Лурье А.И.* Пространственные задачи теории упругости. М. : Гостехиздат, 1955. 491 с.
23. *Улитко А.Ф.* Векторные разложения в пространственной теории упругости. К. : Академперіодика, 2002. 341 с.
24. *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции. Формулы, графики, таблицы. М. : Наука, 1977. 342 с.
25. *Ляв А.* Математическая теория упругости. М. ; Л. : ОНТИ НКТИ СССР, 1935. 674 с.

Поступила в редакцию в мае 2015 г.

Об авторе: **Бобылева Татьяна Николаевна** — кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики, **Московский государственный строительный университет, (ФГБОУ ВПО «МГСУ»)**, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, 8 (499) 183-30-38, tatyana2211@outlook.com.

Для цитирования: *Бобылева Т.Н.* Определение резонансных частот осесимметричных колебаний полого шара с использованием уравнений движения трехмерной теории упругости // Вестник МГСУ. 2015. № 7. С. 25—32.

T.N. Bobyleva

DETERMINATION OF RESONANT FREQUENCIES OF AXISYMMETRIC OSCILLATIONS OF A HOLLOW BALL USING OF THE EQUATIONS OF MOTION OF THREE-DIMENSIONAL ELASTICITY THEORY

A great number of works have been written on the frequencies of spherical bodies. In construction hollow balls are widely used. For this reason it is important to investigate the dynamics of such bodies, in particular, their resonance oscillations.

In the paper we obtained an equation for determining the resonant frequencies of axisymmetric oscillations of a hollow ball. The general solution of three-dimensional equation of motion is used in a spherical coordinate system. Frequency equations of purely radial oscillations of solid and hollow balls are given as special cases. These equations coincide with those obtained previously. The solution may be used in boundary problems for arbitrary loaded space bodies, all the three dimensions of which are relatively equal, in the dynamic tasks for high-frequency oscillations.

Key words: resonant frequency, natural frequency, hollow isotropic ball, axisymmetric oscillations, equations of motion, three dimensional elasticity theory.

References

1. Grigorenko A.Ya., Loza I.A. Osesimmetrichnye kolebaniya pologo neodnorodnogo shara s p'ezokeramicheskimi sloyami [Axisymmetric Oscillations of a Hollow Inhomogeneous Ball with Piezoceramic Layers]. *Problemi obchislyuval'noy mekhaniki i mitsnosti konstruktsey : zbirnik naukovikh prats'* [Problems of Computational Mechanics and Structural Reliability : Collection of Scientific Works]. 2011, no. 15, pp. 70—80. (In Russian)
2. Shul'ga N.A. Radial'nye elektropugnye kolebaniya p'ezokeramicheskogo pologo shara [Radial Electroelastic Oscillations of Piezoceramic Hollow Ball]. *Prikladnaya mekhanika* [Applied Mechanics]. 1990, vol. 26, no. 8, pp. 20—25. (In Russian)
3. Grigorenko A.Ya., Efimova T.L., Shul'ga N.A. Svobodnye neosesimmetrichnye kolebaniya transversal'no-izotropnogo pologo shara [Natural Non-Axially Symmetric Vibrations of Transversely Isotropic Hollow Ball]. *Doklady Akademii nauk Ukrainsskoy SSR* [Reports of the Academy of Sciences of the Ukrainian SSR]. 1986. Ser. A : Fiziko-matematicheskie i tekhnicheskije nauki [Series A : Physico-Mathematical and Technical Sciences]. No. 2, pp. 8—20. (In Russian)
4. Loza I.A., Shul'ga N.A. Osesimmetrichnye kolebaniya p'ezokeramicheskogo pologo shara pri radial'noy polarizatsii [Axisymmetric Oscillations of Piezoceramic Hollow Ball at Radial Polarization]. *Prikladnaya mekhanika* [Applied Mechanics]. 1984, vol. 20, no. 2, pp. 3—8. (In Russian)
5. Frishter L.Yu. Raschetno-eksperimental'nyy metod issledovaniya NDS sostavnykh konstruktsey v zonakh kontsentratsii napryazheniy [Calculation and Experimental Method of Investigating Stress-strain State of Composite Structures in Stress Concentration Zones]. *Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstruktsey i sooruzheniy* [Structural Mechanics of Engineering Structures and Constructions]. 2008, no. 2, pp. 20—27. (In Russian)
6. Lazutkin V.N. Kolebaniya pologo p'ezokeramicheskogo shara [Oscillations of Hollow Piezoceramic Ball]. *Akusticheskij zhurnal* [Acoustic Journal]. 1971, vol. 17, no. 4, pp. 588—592. (In Russian)
7. Petrenko T.P. Sobstvennyye kolebaniya uprugogo pologo shara v zhidkosti ili gaze [Natural Frequencies of Elastic Hollow Ball in Liquid or Gas]. *Izvestiya Akademii nauk Armyanskoy SSR* [News of the Academy of Sciences of the Armenian SSR]. 1971, vol. 24, no. 5, pp. 37—46. (In Russian)
8. Sharma J.N., Sharma N. 3-D Exact Vibration Analysis of a Generalized Thermoelastic Hollow Sphere with Matrix Frobenius Method. *World Journal of Mechanics*. 2012, vol. 2, pp. 98—112. DOI: <http://dx.doi.org/10.4236/wjm.2012.22012>.
9. Srinivas R., Rajashekar M.N., Sambaiah K. Radial Vibrations in a Micro-Isotropic, Micro-Elastic Hollow Sphere. *Int. J. Pure Appl. Sci. Technol.* 2013, vol. 15, no. 2, pp. 54—61.
10. Abd-Alla A.M. Free Vibrations in a Spherical Non-Homogeneous Elastic Region. *J. Comp. and Theor. Nanoscience*. 2013, vol. 10, no. 9, pp. 1914—1920. DOI: <http://dx.doi.org/10.1166/jctn.2013.3148>.

11. Krasnenkov M.A., Korshakovskiy S.I., Chekalkin N.S. Problemy bezopasnosti i na-dezhnosti pri izuchenii ustalosti elementov silovyykh konstruksiy aviatsionnoy i kosmicheskoy tekhniki [Problems of Safety and Reliability at Investigating the Fatigue of Load-Bearing Structures' Elements of Aviation and Space Systems]. *Nauchnyy vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta grazhdanskoj aviatsii* [Scientific Bulletin of the Moscow State Technical University of Civil Aviation]. 2014, vol. 208, pp. 49—53. (In Russian)
12. Kul'tina N.Yu., Novikov V.V. O spektre sobstvennykh chastot nekotorogo klassa tonkikh uprugikh obolochek [On the Eigenfrequency Spectrum of Some Class of Thin Elastic Shells]. *Nauchniye trudove na Rusenskiya universitet : sbornik* [Scientific Works of the Russian University]. 2013, vol. 52, series 2, pp. 93—102. (In Russian)
13. Boriseyko V.A., Ulitko A.F. Elektrouprugie kolebaniya tolstostennoy p'ezokeramicheskoy sfery [Electroelastic Oscillations of Thick-Wall Piezoceramic Ball]. *Teplovyye napryazheniya v elementakh konstruksiy. Doklady nauchnogo soveshchaniya* [Thermal Stresses in Structural Elements. Reports of the Scientific Meeting]. 1974, no. 14, pp. 121—126. (In Russian)
14. Frishter L.Yu., Mozgaleva M.L. Sopostavlenie vozmozhnostey chislennogo i eksperimental'nogo modelirovaniya napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya konstruksiy s uchetom ikh geometricheskoy nelineynosti [Comparing the Possibilities of Numerical and Experimental Modeling of the Stress-Strain State of Structures with Account for their Geometrical Nonlinearity]. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2010, vol. 6, no. 1—2, pp. 221—222. (In Russian)
15. Gol'denveyzer A.L., Lidskiy B.V., Tovstik P.E. *Svobodnye kolebaniya tonkikh uprugikh obolochek* [Natural Oscillations of Thin Elastic Shells]. Moscow, Nauka Publ., 1979, 384 p. (In Russian)
16. Naghdi P.M., Kalnins A. On Vibrations of Elastic Spherical Shells. *Trans. ASME. J. Appl. Mechanics*. 1962, vol. E29, no. 1, pp. 65—72.
17. Kabanov K.I., Kiryanova L.V. Some Aspects of Modeling a Random Process of the Spectral Density Method of Canonical Expansions. *Integration Processes and Innovative Technologies. Achievements and Prospects of Engineering Sciences. Collection of Scientific Works*. Kharkiv, 2012, 4 p.
18. Shmakov V.P. *Izbrannye trudy po gidrouprugosti i dinamike uprugikh konstruksiy* [Selected Works on Hydroelasticity]. Moscow, MGTU im. N.E. Bauman Publ., 2011, 287 p. (In Russian)
19. Titova T.N. O nakhozhdenii normal'nogo vida gamiltonovykh matrits [On Finding the Normal Form of Hamiltonian Matrixes]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics]. 1981, vol. 45, no. 6, pp. 1026—1031. (In Russian)
20. Kartashov G.D., Chiganova N.M. Construction of Control Plans Using a Quantitative Index with Two-Sided Bounds. *J. of Math. Sci.* 1987, vol. 39, no. 2, pp. 2578—2588. DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/bf01084966>.
21. Sharma J.N., Sharma D.K., Dhaliwal S.S. Free Vibration Analysis of Viscothermoelastic Solid Sphere. *Int. J. of Appl. Math. and Mech.* 2012, vol. 8, no. 11, pp. 45—68.
22. Lur'e A.I. *Prostranstvennyye zadachi teorii uprugosti* [Space Problems of Elasticity Theory]. Moscow, Gostekhizdat, 1955, 491 p. (In Russian)
23. Ulitko A.F. *Vektornyye razlozheniya v prostranstvennoy teorii uprugosti* [Vector Decompositions in Space Elasticity Theory]. Kiev, Akadempriodika Publ., 2002, 341 p. (In Russian)
24. Yanke E., Emde F., Lesh F. *Spetsial'nye funktsii. Formuly, grafiki, tablitsy* [Special Functions. Formulas, Diagrams, Tables]. Moscow, Nauka Publ., 1977, 342 p. (In Russian)
25. Lyav A. *Matematicheskaya teoriya uprugosti* [Mathematical Elasticity Theory]. Moscow, Leningrad, ONTI NKTI SSSR Publ., 1935, 674 p. (In Russian)

About the author: **Bobyleva Tat'yana Nikolaevna** — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, **Moscow State University of Civil Engineering (MGSU)**, 26 Yaroslavskoe shosse, Moscow, 129337, Russian Federation; +7 (499) 183-30-38, tatyana2211@outlook.com.

For citation: Bobyleva T.N. Opredelenie rezonansnykh chastot osesimmetrichnykh kolebaniy pologo shara s ispol'zovaniem uravneniy dvizheniya trekhmernoy teorii uprugosti [Determination of Resonant Frequencies of Axisymmetric Oscillations of a Hollow Ball Using of the Equations of Motion of Three-Dimensional Elasticity Theory]. *Vestnik MGSU* [Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering]. 2015, no. 7, pp. 25—32. (In Russian)