ПРОЕКТИРОВАНИЕ И КОНСТРУИРОВАНИЕ СТРОИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ. ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ В СТРОИТЕЛЬСТВЕ

УДК 531/534

DOI: 10.22227/1997-0935.2017.12. 1326-1332

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ РАДИАЛЬНО НЕОДНОРОДНОЙ ПОЛУСФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ЛОКАЛЬНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НАГРУЗКЕ

В.И. Андреев, Д.А. Каплий

*Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет,
(НИУ МГСУ), 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26*

Предмет исследования: одним из перспективных направлений развития строительной механики является разработка методов решения задач теории упругости для тел с непрерывной неоднородностью деформационных характеристик: данные методы позволяют наиболее полно использовать прочностной ресурс материала. В настоящей работе рассматривается двумерная задача для случая, когда на полусферу действует вертикальная локально распределенная нагрузка, а неоднородность обусловлена воздействием температурного поля.

Цели: вывести разрешающую систему уравнений в сферических координатах для последующего нахождения напряженного состояния радиально неоднородной полусферической оболочки при вертикальной локально распределенной нагрузке.

Материалы и методы: в качестве механической модели рассматривается толстостенная железобетонная оболочка (половина полого шара), внутренний радиус которой равен a , а внешний радиус $b > a$. Параметры оболочки $a = 3,3$ м, $b = 4,5$ м, коэффициент Пуассона $\nu = 0,16$; температура на внутренней поверхности оболочки $T_a = 500$ °С; температура на внешней поверхности оболочки $T_b = 0$ °С; $a f = 10$ МПа — вертикальная нагрузка, локально распределенная по внешней поверхности. Полученная краевая задача (система дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами) решается в компьютерном комплексе Maple.

Результаты: максимальные сжимающие напряжения σ_r с учетом неоднородности материала меньше на 10 % по сравнению с напряжением в случае, когда неоднородность не учитывается. Однако это не столь существенно по сравнению с уменьшением в три раза растягивающих напряжений σ_θ на внутренней поверхности и с уменьшением в два раза напряжений σ_ϕ на внешней поверхности полусферы, так как у бетонов в целом прочность на растяжение существенно меньше, чем на сжатие.

Выводы: метод, представленный в данной статье, позволяет уменьшить деформационные характеристики материала, т.е. привести к снижению напряжений, что позволяет, например, уменьшить толщину железобетонной оболочки, более рационально распределить арматуру по сечению, увеличить максимальные значения силовых нагрузок.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: сфера, ряды Фурье, полиномы Лежандра, напряженно-деформированное состояние, неоднородность, механика неоднородных тел, температурное поле, Maple

ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ: Андреев В.И., Каплий Д.А. Напряженное состояние радиально неоднородной полусферической оболочки при вертикальной локально распределенной нагрузке // Вестник МГСУ. 2017. Т. 12. Вып. 11 (110). С. 1326–1332.

THE STRESS STATE OF THE RADially INHOMOGENEOUS HEMISPHERICAL SHELL UNDER LOCALLY DISTRIBUTED VERTICAL LOAD

V.I. Andreev, D.A. Kapliy

*Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (MGSU),
26 Yaroslavl'skoe shosse, Moscow, 129337, Russian Federation*

Subject: one of the promising trends in the development of structural mechanics is the development of methods for solving problems in the theory of elasticity for bodies with continuous inhomogeneity of any deformation characteristics: these methods make it possible to use the strength of the material most fully. In this paper, we consider the two-dimensional problem for the case when a vertical, locally distributed load acts on the hemisphere and the inhomogeneity is caused by the influence of the temperature field.

Research objectives: derive governing system of equations in spherical coordinates for determination of the stress state of the radially inhomogeneous hemispherical shell under locally distributed vertical load.

Materials and methods: as a mechanical model, we chose a thick-walled reinforced concrete shell (hemisphere) with inner and outer radii a and b , respectively, $b > a$. The shell's parameters are $a = 3.3$ m, $b = 4.5$ m, Poisson's ratio $\nu = 0.16$; the load parameters are $f = 10$ MPa — vertical localized load distributed over the outer face, $\theta_0 = 30^\circ$, temperature on the internal

surface of the shell $T_a = 500\text{ }^{\circ}\text{C}$, temperature on the external surface of the shell $T_b = 0\text{ }^{\circ}\text{C}$. The resulting boundary-value problem (a system of differential equations with variable coefficients) is solved using the Maple software package.

Results: maximal compressive stresses σ_r with allowance for material inhomogeneity are reduced by 10 % compared with the case when the inhomogeneity is ignored. But it is not so important compared with a 3-fold decrease in the tensile stress σ_θ on the inner surface and a 2-fold reduction in the tensile stress σ_ϕ on the outer surface of the hemisphere as concretes generally have a tensile strength substantially smaller than the compressive strength.

Conclusions: the method presented in this article makes it possible to reduce the deformation characteristics of the material, i.e. it leads to a reduction in stresses, which allows us to reduce the thickness of the reinforced concrete shell, and also more rationally distribute the reinforcement across the cross-section, increase the maximum values of the mechanical loads.

KEY WORDS: sphere, Fourier series, Legendre polynomials, stress-strain state, inhomogeneity, mechanics of inhomogeneous bodies, temperature field, Maple

FOR CITATION: Andreev V.I., Kapliy D.A. Napryazhennoe sostoyanie radial'no neodnorodnoy polusfericheskoy obolochki pri vertikal'noy lokal'no raspredelennoy nagruzke [The stress state of the radially inhomogeneous hemispherical shell under locally distributed vertical load]. Vestnik MGSU [Proceedings of the Moscow State University of Civil Engineering]. 2017, vol. 12, issue 12 (111), pp. 1326–1332.

ВВЕДЕНИЕ

В большинстве используемых в настоящее время конструкций элементы имеют неизменную по всей длине геометрию сечения, а также постоянные физико-механические характеристики. Напряжения в таких конструкциях распределяются неравномерно, предельное состояние может наступать лишь в незначительных областях, ресурс материала оказывается использованным не полностью, что приводит к его перерасходу. Одним из перспективных направлений развития строительной механики является разработка методов, которые позволяют наиболее полно использовать прочностной ресурс материала. Подобные методы позволяют уменьшить деформационные характеристики материала, т.е. привести к снижению напряжений, что позволяет, например, уменьшить толщину железобетонной оболочки, более рационально распределить арматуру по сечению, увеличить максимальные значения силовых нагрузок. В настоящей работе рассматривается задача для случая, когда на полусферу действует вертикальная локально распределенная нагрузка, а неоднородность обусловлена воздействием температурного поля.

ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

Задачами теории упругости и пластичности неоднородных тел занимались многие российские и зарубежные авторы [1–8]. Расчетам неоднородных тел сферической формы посвящены работы [9–14].

Наиболее сложными в плане решения задач теории упругости неоднородных тел являются задачи с непрерывной неоднородностью, поскольку приводят к решению дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, что вынуждает использовать численные методы. Причинами возникновения в телах непрерывной неоднородности в первую очередь являются различные физические поля (температурное, радиационное, поле влажности и пр. [15–18]).

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

В качестве механической модели рассматривается толстостенная железобетонная оболочка (половина полого шара) (рис. 1), внутренний радиус которой равен a , а внешний радиус $b > a$. Параметры оболочки $a = 3,3\text{ м}$, $b = 4,5\text{ м}$, коэффициент Пуассона $= 0,16$; температура на внутренней поверхности оболочки $T_a = 500\text{ }^{\circ}\text{C}$; температура на внешней поверхности оболочки $T_b = 0\text{ }^{\circ}\text{C}$; $a f = 10\text{ МПа}$ — вертикальная нагрузка, локально распределенная по внешней поверхности (см. рис. 1). Решение для полусферической оболочки получим из решения для сферической оболочки, таким образом, модель имеет шарнирное опирание при $\theta = \pi/2$.

В случае стационарного режима распределение температуры в массиве описывается зависимостью

$$T(r) = \frac{1}{b-a} \left[(T_a - T_b) \frac{ab}{r} + T_b b - T_a a \right].$$

Рис. 1. Модель

Вынужденные температурные деформации при постоянном коэффициенте линейного температурного расширения: $\varepsilon_b = \alpha_T T(r)$.

В расчетах было принято $\alpha_T = 0,1 \cdot 10^{-4} \frac{1}{^\circ\text{C}}$.

Зависимость модуля упругости от температуры [8] можно аппроксимировать с помощью полинома (рис. 2):

$$E[T(r)] = E_0 \cdot \sum_{i=1}^N \beta_i T(r)^i.$$

Здесь было учтено четыре члена ряда.

Рис. 2. Экспериментальные данные зависимости модуля Юнга от температуры бетона и график аппроксимирующей функции $E(T)$

Уравнения равновесия в перемещениях, соответствующие осесимметричной задаче без кручения имеют вид

$$\begin{aligned} & \mu \nabla^2 u + 3(\lambda + \mu) \frac{\partial \varepsilon_m}{\partial r} - \frac{2\mu}{r^2} \left(u + \frac{\partial v}{\partial \theta} + v \cot \theta \right) + \\ & + 3 \frac{\partial \lambda}{\partial r} \varepsilon_m + 2 \frac{\partial \mu}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mu}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) - \\ & - 3 \frac{\partial}{\partial r} (K \varepsilon_T) + R = 0; \\ & \mu \nabla^2 v + \frac{3(\lambda + \mu)}{r} \frac{\partial \varepsilon_m}{\partial \theta} + \frac{\mu}{r^2} \left(2 \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{\sin^2 \theta} \right) + \\ & + \frac{3}{r} \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} \varepsilon_m + \frac{\partial \mu}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \mu}{\partial \theta} \left(u + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) - \\ & - \frac{3}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (K \varepsilon_T) + \Theta = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} \nabla^2 &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right); \\ 3\varepsilon_m &= \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{2u}{r} + \frac{v}{r} \cot \theta. \end{aligned}$$

В данной задаче модуль Юнга является функцией только одной координаты — радиуса. В осесимметричной задаче в сферических координатах

при радиальной неоднородности и зависимости ε_b только от радиуса уравнения (1) упрощаются:

$$\begin{aligned} & \mu \nabla^2 u + 3(\lambda + \mu) \frac{\partial \varepsilon_m}{\partial r} - \frac{2\mu}{r^2} \left(u + \frac{\partial v}{\partial \theta} + v \cot \theta \right) + \\ & + 3 \frac{\partial \lambda}{\partial r} \varepsilon_m + 2 \frac{\partial \mu}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial r} - 3 \frac{\partial}{\partial r} (K \varepsilon_T) + R = 0; \\ & \mu \nabla^2 v + \frac{3(\lambda + \mu)}{r} \frac{\partial \varepsilon_m}{\partial \theta} + \frac{\mu}{r^2} \left(2 \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{\sin^2 \theta} \right) + \\ & + \frac{\partial \mu}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) + \Theta = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Граничные условия в напряжениях для осесимметричной задачи можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} r = a, \quad \sigma_r &= -p_a, \quad \tau_{r\theta} = q_a; \\ r = b, \quad \sigma_r &= -p_b, \quad \tau_{r\theta} = q_b. \end{aligned} \quad (3)$$

Запишем выражения для напряжений через перемещения:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{2u}{r} + \frac{v}{r} \cot \theta \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial r} - 3K \varepsilon_b, \\ \sigma_\theta &= \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{2u}{r} + \frac{v}{r} \cot \theta \right) + \\ & + 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} \right) - 3K \varepsilon_b, \\ \sigma_\varphi &= \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{2u}{r} + \frac{v}{r} \cot \theta \right) + \\ & + 2\mu \left(\frac{u}{r} + \frac{v}{r} \cot \theta \right) - 3K \varepsilon_b, \\ \tau_{r\theta} &= \mu \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Будем искать решение уравнений (2) в виде разложений в ряды Фурье по полиномам Лежандра:

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n(r) P_n(\cos \theta), \\ v(r, \theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} v_n(r) \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $P_n(\cos \theta)$ — полином Лежандра степени n , который является решением уравнения [19, 20]

$$\frac{d^2 P_n(\cos \theta)}{d\theta^2} + \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta} \cot \theta + n(n+1) P_n(\cos \theta) = 0.$$

Также следует представить поверхностные нагрузки в виде рядов

$$\begin{pmatrix} p_a \\ p_b \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} p_{a,n} \\ p_{b,n} \end{pmatrix} P_n(\cos \theta), \quad \begin{pmatrix} q_a \\ q_b \end{pmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} q_{a,n} \\ q_{b,n} \end{pmatrix} \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta}; \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} p_{a,n} \\ p_{b,n} \end{pmatrix} &= \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi \begin{pmatrix} p_a(\theta) \\ p_b(\theta) \end{pmatrix} P_n(\cos\theta) \sin\theta d\theta, \\ \begin{pmatrix} q_{a,n} \\ q_{b,n} \end{pmatrix} &= \frac{2n+1}{2n(n+1)} \int_0^\pi \begin{pmatrix} q_a(\theta) \\ q_b(\theta) \end{pmatrix} \frac{\partial P_n(\cos\theta)}{\partial\theta} \sin\theta d\theta. \end{aligned}$$

На основе анализа разложений поверхностных нагрузок в ряды Фурье производится выбор количества членов рядов Фурье. В нашем случае необходимо учитывать 21 член. При этом количестве членов разложенные в ряды нагрузки достаточно хорошо описывают искомые нагрузки. Подставив выражение (6) в (2), получим дифференциальное уравнение второго порядка для u_n и v_n :

$$\begin{cases} (\lambda + 2\mu)u_n'' + \left[\frac{2(\lambda + 2\mu)}{r} + (\lambda + 2\mu)' \right] \cdot u_n' - \\ - \left[\frac{n(n+1)\mu + (\lambda + 2\mu)}{r^2} + \frac{2\lambda'}{r} \right] \cdot u_n - \\ - 3(K\varepsilon_r)' = 0; \\ \mu v_n'' + \left[\frac{2\mu}{r} + \mu' \right] \cdot v_n' - \\ - \left[n(n+1) \frac{\lambda + 2\mu}{r^2} + \frac{\mu'}{r} \right] \cdot v_n + \frac{\lambda + \mu}{r} \cdot u_n' + \\ + \left[\frac{2(\lambda + 2\mu)}{r^2} + \frac{\mu'}{r} \right] \cdot u_n = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Используя выражения (4) и (5), получим граничные условия, которые удовлетворяют условию (3):

$$\begin{cases} (\lambda(a) + 2\mu(a))u_n'(a) - \frac{2\lambda(a)}{a}u_n(a) - \\ - \frac{n(n+1)\lambda(a)}{a}v_n(a) - 3Kg_n = -p_{a,n}; \\ (\lambda(b) + 2\mu(b))u_n'(b) - \frac{2\lambda(b)}{b}u_n(b) - \\ - \frac{n(n+1)\lambda(b)}{b}v_n(b) - 3Kg_n = -p_{b,n}; \\ \mu(a) \left[v_n'(a) - \frac{v_n(a)}{a} + \frac{u_n(a)}{a} \right] = q_{a,n}; \\ \mu(b) \left[v_n'(b) - \frac{v_n(b)}{b} + \frac{u_n(b)}{b} \right] = q_{b,n}. \end{cases} \quad (8)$$

Решив краевую задачу с уравнениями (7) и граничными условиями (8) в компьютерном комплексе Maple, получаем перемещения, которые подставляем в выражения (4).

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

На рис. 3–6 показаны эпюры радиальных и окружных напряжений, где пунктирная линия показывает напряжения для однородного материала.

Результаты получены при следующих исходных данных: $a = 3,3$ м, $b = 4,5$ м, $\nu = 0,16$, $T_a = 500$ °С, $T_b = 0$ °С, $f = 10$ МПа, $E_0 = 20\,000$ МПа, $\theta_0 = \pi/6$.

Рис. 3. Эпюры радиальных напряжений, зависящие от радиуса r

Рис. 4. Эпюры окружных напряжений, зависящие от радиуса r

Рис. 5. Эпюры радиальных напряжений, зависящие от угла θ

Рис. 6. Эпюры окружных напряжений, зависящие от угла θ

ВЫВОДЫ

Максимальные сжимающие напряжения σ_r с учетом неоднородности материала меньше на 10 % по сравнению с напряжением в случае, когда неоднородность не учитывается. Однако это не столь существенно по сравнению с уменьшением в три раза растягивающих напряжений σ_θ на внутренней поверхности и с уменьшением в два раза напряжений σ_θ на внешней поверхности полусферы, так как у бетонов в целом прочность на растяжение существенно меньше, чем на сжатие.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ду-Цин-Хуа. Плоская задача теории упругости неоднородной среды // Проблемы механики сплошной среды. 1961. С. 152–156.
2. Лехницкий С.Г. Радиальное распределение напряжений в клине и полуплоскости с переменным модулем упругости // Прикладная математика и механика. 1962. Т. XXVI. Вып. 1. С. 146–151.
3. Ольшак В., Рыхлевский Я., Урбановский В. Теория пластичности неоднородных тел. М.: Мир, 1964. 156 с.
4. Ростоцев Н.А. К теории упругости неоднородных тел // Прикладная математика и механика. 1964. Т. 28. Вып. 4. С. 601–611.
5. Conway H.D. A general solution for plain stress in polar coordinates with varying modulus of elasticity // Revue Roumaine des Sciences Techniques. Série de Mécanique. 1965. 10 (1). Pp. 109–112.
6. Ломакин В.А. Теория упругости неоднородных тел. М.: МГУ, 1976. 368 с.
7. Колчин Г.Б. Плоские задачи теории упругости неоднородных тел. Кишинев: Штиинца, 1977. 119 с.
8. Андреев В.И. Некоторые задачи и методы механики неоднородных тел. М.: Изд-во АСВ, 2002. 286 с.
9. Василенко А.Т., Григоренко Я.М., Панкратова Н.Д. Напряженное состояние толстостенных неоднородных сферических оболочек при несимметричных нагрузках // Прикладная механика. 1982. Т. XVIII. № 4. С. 22–28.
10. Andreev V.I., Dubrovskiy I.A. Stress state of the hemispherical shell at front movement radiating field // Applied Mechanics and Materials, Trans Tech Publications. 2013. Vols. 405–408. Pp. 1073–1076.
11. Andreev V.I., Kapliy D.A. Stress state of a radial inhomogeneous semi sphere under the vertical uniform load // Procedia Engineering. 2014. Vol. 91. Pp. 32–36.
12. Махоркин И.Н. Термоупругость кусочно-однородных сферических тел // Математические методы в термомеханике. Киев: Наукова думка, 1978. С. 163–172.
13. Stupishin L.U., Kolesnikov A.G. Geometric nonlinear orthotropic shallow shells investigation // Applied Mechanics and Materials. 2014. Vols. 501–504. Pp. 766–769.
14. Stupishin L.U., Kolesnikov A.G. Geometric nonlinear shallow shells for variable thickness investigation // Advanced Materials Research. 2014. Vols. 919–921. Pp. 144–147.
15. Ленский В.С. Влияние облучения на механические свойства твердых тел // Инженерный сборник. 1960. № 28. С. 97–133.
16. Курузов Б.Н., Глоба В.М. и др. Изменение физико-механических свойств пород в ближней зоне взрыва в калийных рудах // Известия вузов. Горный журнал. 1974. № 10. С. 87–91.
17. Андреев В.И., Аверсьев А.С. Влагоупругость толстостенных оболочек. М.: КЮГ, 2015. 96 с.
18. Бабич В.Ф. Исследование влияния температуры на механические характеристики жестких сетчатых полимеров: дис. ... канд. техн. наук. М., 1966. 125 с.
19. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М.: Наука, 1986. 544 с.
20. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехтеоретиздат, 1955. 492 с.

Поступила в редакцию 20 января 2017 г.

Принята в доработанном виде 19 октября 2017 г.

Одобрена для публикации 22 ноября 2017 г.

ОБ АВТОРАХ: Андреев Владимир Игоревич — доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой сопротивления материалов, Национальный исследовательский Московский государственный стро-

ительный университет (НИУ МГСУ), 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, asv@mgsu.ru; ORCID 0000-0002-1057-4329, Researcher ID T-9006-2017;

Каплий Даниил Александрович — аспирант кафедры сопротивления материалов, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ), 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, daniilkapliy@yahoo.co.uk; ORCID: 0000-0003-4032-5144, ResearcherID V-2035-2017.

REFERENCES

1. Du-Tsin-Khua. Ploskaya zadacha teorii uprugosti neodnorodnoy sredy [Plane problem of elasticity theory of an inhomogeneous medium]. *Problemy mekhaniki sploshnoy sredy* [Problems of Continuum Mechanics]. 1961, pp. 152–156. (In Russian)
2. Lekhnitskiy S.G. Radial'noe raspredelenie napryazheniy v kline i poluploskosti s peremennym modulem uprugosti [Radial stress distribution in the wedge and half-plane with a variable modulus]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied mathematics and mechanics]. 1962. vol. xxvi, issue 1, pp. 146–151. (In Russian)
3. Ol'shak V., Rykhlevskiy Ya., Urbanovskiy V. *Teoriya plastichnosti neodnorodnykh tel* [Theory of plasticity of inhomogeneous bodies]. Moscow, Mir Publ., 1964. 156 p. (In Russian)
4. Rostovtsev N.A. K teorii uprugosti neodnorodnykh tel [On the theory of elasticity of inhomogeneous bodies]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied mathematics and mechanics]. 1964, vol. 28, issue 4, pp. 601–611. (In Russian)
5. Conway H.D. A general solution for plain stress in polar coordinates with varying modulus of elasticity. *Revue Roumaine des Sciences Techniques. Serie de Mecanique*. 1965. 10 (1). Pp. 109–112.
6. Lomakin V.A. *Teoriya uprugosti neodnorodnykh tel* [Theory of elasticity of inhomogeneous bodies]. Moscow, Moscow State University, 1976. 368 p. (In Russian)
7. Kolchin G.B. *Ploskie zadachi teorii uprugosti neodnorodnykh tel* [Flat problems in the theory of elasticity of inhomogeneous bodies]. Kishinev, Shtiintsa Publ., 1977. 119 p. (In Russian)
8. Andreev V.I. *Nekotorye zadachi i metody mekhaniki neodnorodnykh tel* [Some problems and methods of mechanics of inhomogeneous bodies]. Moscow, ASV Publ., 2002. 286 p. (In Russian)
9. Vasilenko A.T., Grigorenko Ya.M., Pankratova N.D. Napryazhennoe sostoyanie tolstostennykh neodnorodnykh sfericheskikh obolochek pri nesimmetrichnykh nagruzkakh [Stress state of thick-walled inhomogeneous spherical shells with asymmetric loads]. *Prikladnaya mekhanika* [Applied Mechanics]. 1982, vol. XVIII, no. 4, pp. 22–28. (In Russian)
10. Andreev V.I., Dubrovskiy I.A. Stress state of the hemispherical shell at front movement radiating field. *Applied Mechanics and Materials, Trans Tech Publications*. 2013, vols. 405–408, pp. 1073–1076.
11. Andreev V.I., Kapliy D.A. Stress state of a radial inhomogeneous semi sphere under the vertical uniform load. *Procedia Engineering*. 2014, vol. 91, pp. 32–36.
12. Makhorkin I.N. Termouprugost' kusochno-odnorodnykh sfericheskikh tel [Thermoelasticity of piecewise-homogeneous spherical bodies]. *Matematicheskie metody v termomekhanike* [Mathematical Methods in Thermomechanics]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1978, pp. 163–172. (In Russian)
13. Stupishin L.U., Kolesnikov A.G. Geometric nonlinear orthotropic shallow shells investigation. *Applied Mechanics and Materials*. 2014, vols. 501–504, pp. 766–769.
14. Stupishin L.U., Kolesnikov A.G. Geometric nonlinear shallow shells for variable thickness investigation. *Advanced Materials Research*. 2014, vols. 919–921, pp. 144–147.
15. Lenskiy V.S. Vliyaniye oblucheniya na mekhanicheskie svoystva tverdykh tel [Influence of irradiation on the mechanical properties of solids]. *Inzhenernyy sbornik* [Engineering collection]. 1960, no. 28, pp. 97–133. (In Russian)
16. Kutuzov B.N., Globa V.M. et al. Izmenenie fiziko-mekhanicheskikh svoystv porod v blizhney zone vzyryva v kaliynykh rudakh [Changes in the physical and mechanical properties of rocks near the explosion area in potash ores]. *Izvestiya vuzov. Gornyy zhurnal* [News of the universities. Mining Journal]. 1974, no. 10, pp. 87–91. (In Russian)
17. Andreev V.I., Aversh'ev A.S. *Vlagouprugost' tolstostennykh obolochek* [Humidity elasticity of thick shells]. Moscow, KYuG Publ., 2015. 96 p. (In Russian)
18. Babich V.F. *Issledovanie vliyaniya temperatury na mekhanicheskie kharakteristiki polimerov : dis. ... kand. tekhn. nauk* [Research of the temperature effect on the mechanical properties of polymers : thesis of candidate of technical sciences]. Moscow, 1966. 125 p. (In Russian)
19. Bronshteyn I.N., Semendyaev K.A. *Spravochnik po matematike dlya inzhenerov i uchashchikhsya vtuzov* [Handbook on mathematics for engineers and students of technical colleges]. Moscow, Nauka Publ., 1986. 544 p. (In Russian)
20. Lur'e A.I. *Prostranstvennyye zadachi teorii uprugosti* [Three-dimensional problems of elasticity]. Moscow, Gostekhizdat Publ., 1955. 492 p. (In Russian)

Received January 20, 2017.

Adopted in final form on October 19, 2017.

Approved for publication on November 22, 2017.

ABOUT THE AUTHORS: **Andreev Vladimir Igorevich** — Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Resistance of Materials Department, **Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (MGSU)**, 26 Yaroslavskoe shosse, 129337, Russian Federation, asv@mgsu.ru; ORCID 0000-0002-1057-4329, Researcher ID T-9006-2017;

Kapliy Daniil Aleksandrovich — Postgraduate student, Resistance of Materials Department, **Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (MGSU)**, 26 Yaroslavskoe shosse, 129337, Russian Federation, daniilkapliy@yahoo.co.uk; ORCID: 0000-0003-4032-5144, ResearcherID V-2035-2017.