АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ОРТОТРОПНЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОЭФФИЦИЕНТА ФОРМЫ

С.Ю. Савин, И.А. Ивлев¹

Юго-Западный государственный университет (ЮЗГУ), 305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, д. 94;

*¹Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева (ОГУ имени И.С. Тургенева),
302026, г. Орел, ул. Комсомольская, д. 95*

В статье рассматривается задача об устойчивости упругих ортотропных прямоугольных пластин для случая, когда две противоположные стороны шарнирно оперты, а по двум другим произвольным образом скомбинированы шарнирное опирание и жесткое защемление. Вариант пластины, шарнирно опертой по всему контуру, был рассмотрен авторами ранее, поэтому в данной работе решение для него не приводится. Внешняя нагрузка равномерно распределена по линии и приложена к одной из наименьших сторон пластины.

Предмет исследования: устойчивость упругих ортотропных прямоугольных пластин для случая, когда две их противоположные стороны шарнирно оперты, а по двум другим произвольным образом комбинируются шарнирное опирание и жесткое защемление.

Цели: получение для ортотропных прямоугольных пластин с комбинированными граничными условиями аналитических выражений для поверхностей значений критических сил, параметрами в которых являются интегральная геометрическая характеристика — коэффициент формы—отношения изгибных жесткостей; распространение метода интерполяции по коэффициенту формы (МИКФ) на расчет упругих ортотропных пластин из условия устойчивости.

Материалы и методы: для решения задачи об устойчивости упругих ортотропных прямоугольных пластин использовался МИКФ. Решения, полученные с использованием МИКФ, сопоставлены с результатами расчета по МКЭ в программе SCAD Office 11.5.

Результаты: для ортотропных прямоугольных пластин с комбинированными граничными условиями получены аналитические выражения для поверхностей значений критических сил, параметрами в которых являются интегральная геометрическая характеристика — коэффициент формы—отношения изгибных жесткостей. Поверхность значений критической силы для ортотропных прямоугольных пластин образует одну из границ данного интегрального физико-механического параметра для всего множества ортотропных пластин произвольного очертания с выпуклым контуром, поэтому может быть использована при получении опорных решений по МИКФ. Продемонстрировано решение задачи об устойчивости ортотропных прямоугольных пластин МИКФ с использованием в качестве опорных решений результатов, полученных по выше указанным аналитическим выражениям. Решения, полученные по МИКФ, сопоставлены с результатами расчета по методу конечных элементов и демонстрируют удовлетворительную точность.

Выводы: представленные в работе аналитические выражения для поверхностей значений критической силы могут быть использованы как непосредственно для расчета ортотропных прямоугольных пластин, сжатых в одном направлении, так и для выбора одного из опорных решений по МИКФ при расчете пластин с произвольным выпуклым контуром и комбинированными граничными условиями. Предложенный подход может быть распространен и на другие формы пластин, варианты условий их закрепления, а также виды нагружения.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: ортотропия, прямоугольная пластина, устойчивость, критическая сила, коэффициент формы, метод интерполяции по коэффициенту формы, опорное решение, комбинированные граничные условия, распределенная нагрузка, МКЭ

ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ: Савин С.Ю., Ивлев И.А. Анализ устойчивости ортотропных прямоугольных пластин с использованием коэффициента формы // Вестник МГСУ. 2017. Т. 12. Вып. 11 (110). С. 1333–1341.

STABILITY ANALYSIS OF ORTHOTROPIC RECTANGULAR PLATES USING THE FORM FACTOR

S.Y. Savin, I.A. Ivlev¹

South-West State University (SWSU), 94 50 let Oktyabrya str., Kursk, 305040, Russian Federation;

¹Orel State University named after I.S. Turgenev, 95 Komsomol'skaya str., Orel, 302026, Russian Federation

The article describes the problem of stability of elastic orthotropic rectangular plates for the case when two opposite sides are simply supported, and two other sides have boundary with either simple supports or fixed supports, which are arbitrarily combined. The plate that is simply supported all over the contour is not considered in the article since the authors described it in the earlier publication. The external load is uniformly distributed along the side and is applied to the shorter side of the plate. To solve the stability problem, the authors use an approximate analytical method – the form factor interpolation method, which is based on the functional relationship between an integral geometric parameter of the mid-plane surface (the form factor) and an integral mechanical parameter (the critical force of buckling).

Subject: stability of elastic orthotropic rectangular plates for the case when two opposite sides are simply supported and two other sides have combination of simple supports and fixed supports arbitrarily combined.

Materials and methods: the form factor interpolation method (FFIM) is used to solve the stability problem of elastic orthotropic rectangular plates. The solutions which were obtained by the FFIM method were compared with the results of calculations by FEM (the program SCAD Office 11.5).

Results: for orthotropic rectangular plates with combined boundary conditions, we obtained analytical expressions for critical force surfaces and they depend on an integral geometric parameter — form factor and flexural stiffness ratio. To the authors' knowledge, these expressions are obtained for the first time. The critical force surface for orthotropic rectangular plates constitutes one of the boundaries of this integral physicomaterial parameter for the entire set of orthotropic plates with arbitrary convex contour. Therefore, this surface can be used for obtaining reference solutions by the form factor interpolation method.

We demonstrated how to obtain the solution of the stability problem for orthotropic rectangular plates by the form factor interpolation method using the results obtained from the aforementioned analytical expressions as the reference solutions. The solutions obtained by the form factor interpolation method are compared with the results of calculations by the finite element method and show a good accuracy.

Conclusions: the analytical expressions for critical loads presented in this work can be used directly for the stability analysis of orthotropic rectangular plates loaded in one direction as well as to obtain one of the reference solutions by the form factor interpolation method for plates with arbitrary convex contour and combined boundary conditions. The proposed approach can be extended to other forms of plates, boundary conditions and loading types.

KEY WORDS: orthotropy, rectangular plate, stability, critical force, form factor, the form factor interpolation method, reference solution, combined boundary conditions, distributed load, FEM

FOR CITATION: Savin S.Y., Ivlev I.A. Analiz ustoychivosti ortotropnykh pryamougol'nykh plit s ispol'zovaniem koeffitsienta formy [Stability analysis of orthotropic rectangular plates using the form factor]. Vestnik MGSU [Proceedings of the Moscow State University of Civil Engineering]. 2017, vol. 12, issue 11 (110), pp. 1333–1341.

ВВЕДЕНИЕ

Одной из основных задач при проектировании тонкостенных элементов стержневых конструкций и пластин является анализ их устойчивости: в первом случае — местной, во втором — общей. Однако в обоих случаях речь идет об одном и том же явлении, для описания которого используется одинаковый математический аппарат. Основные положения из теории устойчивости пластин были систематизированы и изложены в работах [1, 2]. Однако по-прежнему остается неисследованным широкий круг важных с практической точки зрения задач, которые, как правило, могут быть решены лишь приближенно с использованием аналитических или численных методов.

ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

Среди аналитических решений задачи об устойчивости преобладают основанные на использовании вариационных методов строительной механики или на асимптотическом разложении исходных дифференциальных уравнений. В работе [3] выведены асимптотические разрешающие уравнения теории устойчивости многослойных тонких пластин на основе асимптотического разложения исходных трехмерных уравнений теории упругости по малому геометрическому параметру (отношению толщины пластины к ее длине). Выполнен расчет из условия устойчивости прямоугольной пластины при различных видах загрузки с учетом сжимаемости материала [4]. Авторами получены зависимости между вариациями напряжений и деформаций, которые

можно использовать при решении и более сложных задач по устойчивости пластин и оболочек. Для оценки устойчивости пластин с различными граничными условиями при одноосном и двухосном сжатии использовали аналитические решения на основе метода Ритца [5]. Полученные результаты были сопоставлены с решениями по методу конечных элементов (МКЭ) в программном комплексе ANSYS. Указывается на возможность оценки местной устойчивости тонких стенок ригелей и стоек рам переменного сечения с помощью изопериметрического метода строительной механики [6, 7]. Методом итераций получено решение задачи об устойчивости защемленной прямоугольной пластины сжатой в одном направлении [8]. Используется МКЭ для решения задачи об устойчивости ортотропной пластины с двумя свободными краями, нагруженной изгибающим моментом в плоскости [9]. В статье [10] авторами использована численная реализация вариационного метода применительно к анализу устойчивости прямоугольных гладких и подкрепленных дискретными ребрами жесткости пластин с учетом упругих и пластических деформаций. В работах [11–13] авторами исследована потеря местной устойчивости для стенок и поясов двутавровых балок.

Из приведенного краткого обзора публикаций последнего времени по проблеме устойчивости пластин можно сделать вывод о том, что большинство аналитических решений получено для пластин прямоугольной или круглой формы. При расчете пластин иного очертания в основном преобладают численные методы, которые могут быть эффективно реализованы лишь при использовании компьюте-

ров. Однако в данном случае следует с осторожностью подходить к построению расчетных моделей, особенно для ортотропных пластин, чтобы обеспечить соответствие местных осей конечных элементов общей системе координат.

В этой связи авторами данной работы предлагается использовать для оценки устойчивости упругих ортотропных пластин метод интерполяции по коэффициенту формы (МИКФ). В основе МИКФ лежит функциональная связь между интегральными характеристиками пластинки: геометрической (коэффициент формы) и механическими (максимальный прогиб, основная частота собственных колебаний, критическая сила при потере устойчивости) [14]. Под коэффициентом формы следует понимать интеграл по контуру следующего вида:

$$K_f = \min \oint_L \frac{ds}{h}$$

где ds — элементарный участок контура замкнутой области; h — перпендикуляр, опущенный на ds из некоторой точки, называемой полюсом и выбираемой таким образом, чтобы значение K_f было минимальным.

В работах последнего времени в качестве геометрического аналога интегральных физико-механических характеристик пластин используется и иной параметр [15] — отношение конформных радиусов. Однако применительно к решению задач об устойчивости пластин он, по-видимому, не применялся.

МИКФ использован для оценки устойчивости пологих и сферических изотропных оболочек [16, 17]. В работе [18] рассматривается применение МИКФ к решению задачи об устойчивости изотропной прямоугольной пластины. Однако применение указанного метода к решению задач динамики и статики ортотропных пластин [19–21] позволяет распространить его и на вопросы устойчивости. При этом одной из важных задач развития МИКФ к решению задач устойчивости ортотропных пластин на данном этапе становится построение граничных поверхностей значений критической силы для базовых форм очертания их срединной плоскости: прямоугольной, ромбической, треугольной, полигональной.

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

В данной работе приводится решение задачи об устойчивости прямоугольных упругих ортотроп-

ных пластин для случая, когда две противоположные стороны шарнирно оперты, а две другие оперты произвольным образом (шарнирное опирание или защемление), как это показано на рис. 1. Нагрузка приложена к торцу наименьшей из сторон пластины и действует в направлении, перпендикулярном этой стороне. Построение аппроксимирующих функций осуществлялось путем обработки в программах Table Curve 2D и 3D численных результатов расчета по МКЭ, выполненных в программном комплексе SCAD Office 11.5 (с числом конечных элементов не менее 500) при соотношении цилиндрических жесткостей $D_x/H = 1, 2, \dots, 5$; $D_y/H = 1, 2, \dots, 5$.

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Для устойчивости ортотропной пластинки из теории упругости известно следующее дифференциальное уравнение [22]:

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + N_o \left(\alpha \frac{d^2 \omega}{dx^2} + 2\gamma \frac{d^2 \omega}{dx dy} + \beta \frac{d^2 \omega}{dy^2} \right) = 0, \quad (1)$$

где $H = D_1 + 2D_{xy}$, $D_1 = D_x \nu_y = D_y \nu_x$; N_o — параметр характеризующий внешнюю критическую нагрузку; D_x, D_y, D_{xy} — изгибные жесткости ортотропной пластины; ν_x, ν_y — коэффициенты Пуассона вдоль соответствующих направлений; α, γ, β — коэффициенты из выражений $N_x = \alpha N_o$, $N_y = \beta N_o$, $N_{xy} = \gamma N_o$ (N_x, N_y, N_{xy} — внутренние усилия в пластине).

Рассмотрим случай одностороннего сжатия вдоль оси OX ($\gamma = \beta = 0, \alpha = 1$) пластинки единичной площади ($A = 1$):

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + N_o \frac{d^2 \omega}{dx^2} = 0 \quad (2)$$

Разделим правую и левую части уравнения (2) на H и осуществим замену:

$$K_N = N_o \cdot A/H; \quad \eta_1 = D_x/H; \quad \eta_2 = D_y/H,$$

в этом случае имеем дифференциальное уравнение вида

$$\eta_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \eta_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + K_N \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (3)$$

Рис. 1. Варианты граничных условий для прямоугольных пластин

Здесь K_N — безразмерная функция критической силы, вызывающей потерю устойчивости пластины. Для прямоугольных ортотропных пластин с отношением сторон $a/b = 0,1, 0,2, \dots, 1$ и соотношениями цилиндрических жесткостей $\eta_1 = \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3, 4, 5$ и $\eta_2 = \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3, 4, 5$ численным путем, используя МКЭ, реализованный в программном комплексе SCAD Office, были получены значения K_N из выражения (3). На рис. 2 и 3 представлены графики зависимости функции K_N от соотношений цилиндрических жесткостей и от коэффициента формы соответственно.

Вид графиков, приведенных на рис. 2 и 3, свидетельствует о наличии функциональной связи K_N с коэффициентом формы и соотношениями цилиндрических жесткостей. Поэтому будем искать K_N в следующем виде:

$$K_N = a_1 + a_2\eta_1 + a_3\eta_2 + a_4\eta_1^2 + a_5\eta_2^2 + a_6\eta_1\eta_2 + a_7\eta_1^3 + a_8\eta_2^3 + a_9\eta_1\eta_2^2 + a_{10}\eta_1^2\eta_2, \quad (4)$$

где a_i — параметры, зависящие от коэффициента формы K_f [14] (см. рис. 3, б).

Предлагается искать параметры a_i из выражения (4) в следующем виде:

$$a_i = \sum_{j=1}^n A_n K_f^{(1-n)}, \quad (5)$$

где A_n — численные коэффициенты, зависящие от граничных условий пластины (табл.).

Найденные значения параметров A_n из табл. подставляем в выражение (5). Найдем значения критического усилия для ортотропных пластинок в виде прямоугольников при комбинированных граничных условиях. Сравним вычисленные значения критических сил для схем с рис. 1 по методике

Рис. 2. График зависимости K_N от соотношений цилиндрических жесткостей для прямоугольной пластины с отношением сторон $a/b = 0,5$ для варианта закрепления контура, соответствующего первой схеме на рис. 1

Рис. 3. График зависимости: а — параметра K_N ; б — коэффициента a_i из выражения (4) для варианта закрепления контура, соответствующего первой схеме на рис. 1

Полученные значения параметра A_n

Параметр j	Параметр a_i по формуле (4)									
	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
<i>Комбинированное опирание по контуру (рис. 1, первая схема)</i>										
1	$2,74 \cdot 10^3$	$2,60 \cdot 10^4$	$1,40 \cdot 10^7$	$-3,62 \cdot 10^5$	$6,43 \cdot 10^7$	$8,79 \cdot 10^6$	$-2,78 \cdot 10^6$	$-7,64 \cdot 10^6$	$-5,83 \cdot 10^5$	$-9,83 \cdot 10^5$
2	$-3,12 \cdot 10^5$	$-4,13 \cdot 10^6$	$-2,77 \cdot 10^9$	$7,81 \cdot 10^7$	$-1,33 \cdot 10^{10}$	$-1,83 \cdot 10^9$	$5,74 \cdot 10^8$	$1,58 \cdot 10^9$	$1,24 \cdot 10^8$	$2,02 \cdot 10^8$
3	$1,53 \cdot 10^7$	$2,84 \cdot 10^8$	$2,47 \cdot 10^{11}$	$-7,56 \cdot 10^9$	$1,25 \cdot 10^{12}$	$1,71 \cdot 10^{11}$	$-5,35 \cdot 10^{10}$	$-1,48 \cdot 10^{11}$	$-1,20 \cdot 10^{10}$	$-1,87 \cdot 10^{10}$
4	$-3,79 \cdot 10^8$	$-1,11 \cdot 10^{10}$	$-1,31 \cdot 10^{13}$	$4,35 \cdot 10^{11}$	$-6,99 \cdot 10^{13}$	$-9,64 \cdot 10^{12}$	$2,99 \cdot 10^{12}$	$8,30 \cdot 10^{12}$	$6,92 \cdot 10^{11}$	$1,03 \cdot 10^{12}$
5	$4,51 \cdot 10^9$	$2,73 \cdot 10^{11}$	$4,61 \cdot 10^{14}$	$-1,66 \cdot 10^{13}$	$2,64 \cdot 10^{15}$	$3,64 \cdot 10^{14}$	$-1,13 \cdot 10^{14}$	$-3,13 \cdot 10^{14}$	$-2,69 \cdot 10^{13}$	$-3,85 \cdot 10^{13}$
6	$-6,40 \cdot 10^9$	$-4,40 \cdot 10^{12}$	$-1,15 \cdot 10^{16}$	$4,47 \cdot 10^{14}$	$-7,08 \cdot 10^{16}$	$-9,81 \cdot 10^{15}$	$3,01 \cdot 10^{15}$	$8,40 \cdot 10^{15}$	$7,45 \cdot 10^{14}$	$1,02 \cdot 10^{15}$
7	$-4,89 \cdot 10^{11}$	$4,67 \cdot 10^{13}$	$2,06 \cdot 10^{17}$	$-8,69 \cdot 10^{15}$	$1,40 \cdot 10^{18}$	$1,94 \cdot 10^{17}$	$-5,93 \cdot 10^{16}$	$-1,66 \cdot 10^{17}$	$-1,52 \cdot 10^{16}$	$-1,98 \cdot 10^{16}$
8	$5,99 \cdot 10^{12}$	$-3,16 \cdot 10^{14}$	$-2,74 \cdot 10^{18}$	$1,24 \cdot 10^{17}$	$-2,07 \cdot 10^{19}$	$-2,88 \cdot 10^{18}$	$8,75 \cdot 10^{17}$	$2,45 \cdot 10^{18}$	$2,32 \cdot 10^{17}$	$2,88 \cdot 10^{17}$
9	$-2,99 \cdot 10^{13}$	$1,21 \cdot 10^{15}$	$2,68 \cdot 10^{19}$	$-1,30 \cdot 10^{18}$	$2,31 \cdot 10^{20}$	$3,21 \cdot 10^{19}$	$-9,72 \cdot 10^{18}$	$-2,73 \cdot 10^{19}$	$-2,66 \cdot 10^{18}$	$-3,16 \cdot 10^{18}$
10	$5,67 \cdot 10^{13}$	$-1,57 \cdot 10^{15}$	$-1,91 \cdot 10^{20}$	$9,84 \cdot 10^{18}$	$-1,93 \cdot 10^{21}$	$-2,69 \cdot 10^{20}$	$8,11 \cdot 10^{19}$	$2,28 \cdot 10^{20}$	$2,29 \cdot 10^{19}$	$2,59 \cdot 10^{19}$
11	—	$-4,92 \cdot 10^{15}$	$9,66 \cdot 10^{20}$	$-5,28 \cdot 10^{19}$	$1,19 \cdot 10^{22}$	$1,66 \cdot 10^{21}$	$-5,00 \cdot 10^{20}$	$-1,41 \cdot 10^{21}$	$-1,46 \cdot 10^{20}$	$-1,57 \cdot 10^{20}$
12	—	$1,52 \cdot 10^{16}$	$-3,28 \cdot 10^{21}$	$1,90 \cdot 10^{20}$	$-5,30 \cdot 10^{22}$	$-7,38 \cdot 10^{21}$	$2,21 \cdot 10^{21}$	$6,26 \cdot 10^{21}$	$6,65 \cdot 10^{20}$	$6,83 \cdot 10^{20}$
13	—	—	$6,73 \cdot 10^{21}$	$-4,09 \cdot 10^{20}$	$1,60 \cdot 10^{23}$	$2,22 \cdot 10^{22}$	$-6,66 \cdot 10^{21}$	$-1,88 \cdot 10^{22}$	$-2,06 \cdot 10^{21}$	$-2,01 \cdot 10^{21}$
14	—	—	$-6,29 \cdot 10^{21}$	$4,01 \cdot 10^{20}$	$-2,93 \cdot 10^{23}$	$-4,07 \cdot 10^{22}$	$1,22 \cdot 10^{22}$	$3,45 \cdot 10^{22}$	$3,88 \cdot 10^{21}$	$3,61 \cdot 10^{21}$
15	—	—	—	—	$2,46 \cdot 10^{23}$	$3,42 \cdot 10^{22}$	$-1,02 \cdot 10^{22}$	$-2,91 \cdot 10^{22}$	$-3,35 \cdot 10^{21}$	$-2,97 \cdot 10^{21}$
<i>Комбинированное опирание по контуру (рис. 1, вторая схема)</i>										
1	$-9,81 \cdot 10^8$	$-4,97 \cdot 10^7$	$7,61 \cdot 10^7$	$-1,04 \cdot 10^8$	$-1,94 \cdot 10^7$	$-4,04 \cdot 10^7$	$1,10 \cdot 10^7$	$-1,78 \cdot 10^7$	$-1,90 \cdot 10^6$	$3,10 \cdot 10^6$
2	$2,11 \cdot 10^{11}$	$9,79 \cdot 10^9$	$-1,50 \cdot 10^{10}$	$2,18 \cdot 10^{10}$	$3,81 \cdot 10^9$	$8,17 \cdot 10^9$	$-2,31 \cdot 10^9$	$3,69 \cdot 10^9$	$4,24 \cdot 10^8$	$-6,31 \cdot 10^8$
3	$-2,07 \cdot 10^{13}$	$-8,62 \cdot 10^{11}$	$1,32 \cdot 10^{12}$	$-2,06 \cdot 10^{12}$	$-3,35 \cdot 10^{11}$	$-7,43 \cdot 10^{11}$	$2,19 \cdot 10^{11}$	$-3,45 \cdot 10^{11}$	$-4,28 \cdot 10^{10}$	$5,77 \cdot 10^{10}$
4	$1,22 \cdot 10^{15}$	$4,52 \cdot 10^{13}$	$-6,95 \cdot 10^{13}$	$1,17 \cdot 10^{14}$	$1,75 \cdot 10^{13}$	$4,04 \cdot 10^{13}$	$-1,25 \cdot 10^{13}$	$1,94 \cdot 10^{13}$	$2,60 \cdot 10^{12}$	$-3,16 \cdot 10^{12}$
5	$-4,89 \cdot 10^{16}$	$-1,57 \cdot 10^{15}$	$2,43 \cdot 10^{15}$	$-4,47 \cdot 10^{15}$	$-6,09 \cdot 10^{14}$	$-1,47 \cdot 10^{15}$	$4,78 \cdot 10^{14}$	$-7,32 \cdot 10^{14}$	$-1,06 \cdot 10^{14}$	$1,16 \cdot 10^{14}$
6	$1,41 \cdot 10^{18}$	$3,86 \cdot 10^{16}$	$-5,96 \cdot 10^{16}$	$1,22 \cdot 10^{17}$	$1,49 \cdot 10^{16}$	$3,79 \cdot 10^{16}$	$-1,30 \cdot 10^{16}$	$1,97 \cdot 10^{16}$	$3,07 \cdot 10^{15}$	$-3,00 \cdot 10^{15}$
7	$-3,02 \cdot 10^{19}$	$-6,85 \cdot 10^{17}$	$1,06 \cdot 10^{18}$	$-2,43 \cdot 10^{18}$	$-2,64 \cdot 10^{17}$	$-7,16 \cdot 10^{17}$	$2,62 \cdot 10^{17}$	$-3,89 \cdot 10^{17}$	$-6,54 \cdot 10^{16}$	$5,71 \cdot 10^{16}$
8	$4,90 \cdot 10^{20}$	$8,96 \cdot 10^{18}$	$-1,39 \cdot 10^{19}$	$3,65 \cdot 10^{19}$	$3,46 \cdot 10^{18}$	$1,01 \cdot 10^{19}$	$-3,94 \cdot 10^{18}$	$5,75 \cdot 10^{18}$	$1,04 \cdot 10^{18}$	$-8,08 \cdot 10^{17}$
9	$-6,09 \cdot 10^{21}$	$-8,63 \cdot 10^{19}$	$1,35 \cdot 10^{20}$	$-4,12 \cdot 10^{20}$	$-3,33 \cdot 10^{19}$	$-1,06 \cdot 10^{20}$	$4,47 \cdot 10^{19}$	$-6,40 \cdot 10^{19}$	$-1,25 \cdot 10^{19}$	$8,56 \cdot 10^{18}$
10	$5,81 \cdot 10^{22}$	$6,05 \cdot 10^{20}$	$-9,47 \cdot 10^{20}$	$3,49 \cdot 10^{21}$	$2,33 \cdot 10^{20}$	$8,33 \cdot 10^{20}$	$-3,81 \cdot 10^{20}$	$5,35 \cdot 10^{20}$	$1,12 \cdot 10^{20}$	$-6,76 \cdot 10^{19}$
11	$-4,22 \cdot 10^{23}$	$-3,01 \cdot 10^{21}$	$4,73 \cdot 10^{21}$	$-2,19 \cdot 10^{22}$	$-1,16 \cdot 10^{21}$	$-4,80 \cdot 10^{21}$	$2,40 \cdot 10^{21}$	$-3,30 \cdot 10^{21}$	$-7,38 \cdot 10^{20}$	$3,92 \cdot 10^{20}$
12	$2,29 \cdot 10^{24}$	$1,01 \cdot 10^{22}$	$-1,59 \cdot 10^{22}$	$9,85 \cdot 10^{22}$	$3,88 \cdot 10^{21}$	$1,97 \cdot 10^{22}$	$-1,08 \cdot 10^{22}$	$1,46 \cdot 10^{22}$	$3,49 \cdot 10^{21}$	$-1,62 \cdot 10^{21}$
13	$-9,02 \cdot 10^{24}$	$-2,03 \cdot 10^{22}$	$3,21 \cdot 10^{22}$	$-3,01 \cdot 10^{23}$	$-7,83 \cdot 10^{21}$	$-5,43 \cdot 10^{22}$	$3,32 \cdot 10^{22}$	$-4,41 \cdot 10^{22}$	$-1,12 \cdot 10^{22}$	$4,47 \cdot 10^{21}$
14	$2,43 \cdot 10^{25}$	$1,86 \cdot 10^{22}$	$-2,96 \cdot 10^{22}$	$5,59 \cdot 10^{23}$	$7,19 \cdot 10^{21}$	$9,00 \cdot 10^{22}$	$-6,20 \cdot 10^{22}$	$8,07 \cdot 10^{22}$	$2,18 \cdot 10^{22}$	$-7,43 \cdot 10^{21}$
15	$-4,02 \cdot 10^{25}$	—	—	$-4,77 \cdot 10^{23}$	—	$-6,75 \cdot 10^{22}$	$5,32 \cdot 10^{22}$	$-6,78 \cdot 10^{22}$	$-1,94 \cdot 10^{22}$	$5,58 \cdot 10^{21}$
16	$3,07 \cdot 10^{25}$	—	—	—	—	—	—	—	—	—
<i>Комбинированное опирание по контуру (рис. 1, третья схема)</i>										
1	$-1,85 \cdot 10^8$	$2,20 \cdot 10^5$	$1,96 \cdot 10^8$	$-9,56 \cdot 10^7$	$-1,21 \cdot 10^8$	$-1,19 \cdot 10^7$	$1,73 \cdot 10^7$	$-2,19 \cdot 10^7$	$5,73 \cdot 10^5$	$-2,38 \cdot 10^7$
2	$3,85 \cdot 10^{10}$	$-3,60 \cdot 10^7$	$-4,08 \cdot 10^{10}$	$1,99 \cdot 10^{10}$	$2,52 \cdot 10^{10}$	$2,36 \cdot 10^9$	$-3,59 \cdot 10^9$	$4,81 \cdot 10^9$	$-1,14 \cdot 10^8$	$4,92 \cdot 10^9$
3	$-3,62 \cdot 10^{12}$	$2,56 \cdot 10^9$	$3,84 \cdot 10^{12}$	$-1,87 \cdot 10^{12}$	$-2,37 \cdot 10^{12}$	$-2,11 \cdot 10^{11}$	$3,36 \cdot 10^{11}$	$-4,82 \cdot 10^{11}$	$1,01 \cdot 10^{10}$	$-4,59 \cdot 10^{11}$
4	$2,05 \cdot 10^{14}$	$-1,04 \cdot 10^{11}$	$-2,17 \cdot 10^{14}$	$1,05 \cdot 10^{14}$	$1,33 \cdot 10^{14}$	$1,12 \cdot 10^{13}$	$-1,89 \cdot 10^{13}$	$2,92 \cdot 10^{13}$	$-5,37 \cdot 10^{11}$	$2,57 \cdot 10^{13}$
5	$-7,77 \cdot 10^{15}$	$2,67 \cdot 10^{12}$	$8,23 \cdot 10^{15}$	$-3,98 \cdot 10^{15}$	$-5,05 \cdot 10^{15}$	$-3,96 \cdot 10^{14}$	$7,15 \cdot 10^{14}$	$-1,20 \cdot 10^{15}$	$1,89 \cdot 10^{13}$	$-9,68 \cdot 10^{14}$
6	$2,10 \cdot 10^{17}$	$-4,56 \cdot 10^{13}$	$-2,22 \cdot 10^{17}$	$1,07 \cdot 10^{17}$	$1,36 \cdot 10^{17}$	$9,85 \cdot 10^{15}$	$-1,92 \cdot 10^{16}$	$3,56 \cdot 10^{16}$	$-4,70 \cdot 10^{14}$	$2,60 \cdot 10^{16}$
7	$-4,18 \cdot 10^{18}$	$5,27 \cdot 10^{14}$	$4,43 \cdot 10^{18}$	$-2,13 \cdot 10^{18}$	$-2,71 \cdot 10^{18}$	$-1,78 \cdot 10^{17}$	$3,81 \cdot 10^{17}$	$-7,85 \cdot 10^{17}$	$8,47 \cdot 10^{15}$	$-5,12 \cdot 10^{17}$
8	$6,23 \cdot 10^{19}$	$-4,07 \cdot 10^{15}$	$-6,59 \cdot 10^{19}$	$3,17 \cdot 10^{19}$	$4,03 \cdot 10^{19}$	$2,36 \cdot 10^{18}$	$-5,66 \cdot 10^{18}$	$1,32 \cdot 10^{19}$	$-1,12 \cdot 10^{17}$	$7,56 \cdot 10^{18}$
9	$-6,99 \cdot 10^{20}$	$2,01 \cdot 10^{16}$	$7,40 \cdot 10^{20}$	$-3,55 \cdot 10^{20}$	$-4,51 \cdot 10^{20}$	$-2,32 \cdot 10^{19}$	$6,32 \cdot 10^{19}$	$-1,69 \cdot 10^{20}$	$1,10 \cdot 10^{18}$	$-8,41 \cdot 10^{19}$
10	$5,89 \cdot 10^{21}$	$-5,77 \cdot 10^{16}$	$-6,23 \cdot 10^{21}$	$2,99 \cdot 10^{21}$	$3,79 \cdot 10^{21}$	$1,65 \cdot 10^{20}$	$-5,30 \cdot 10^{20}$	$1,67 \cdot 10^{21}$	$-7,83 \cdot 10^{18}$	$7,02 \cdot 10^{20}$
11	$-3,67 \cdot 10^{22}$	$7,28 \cdot 10^{16}$	$3,88 \cdot 10^{22}$	$-1,86 \cdot 10^{22}$	$-2,36 \cdot 10^{22}$	$-8,38 \cdot 10^{20}$	$3,29 \cdot 10^{21}$	$-1,25 \cdot 10^{22}$	$3,96 \cdot 10^{19}$	$-4,33 \cdot 10^{21}$

Параметр j	Параметр a_i по формуле (4)									
	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
12	$1,64 \cdot 10^{23}$	—	$-1,73 \cdot 10^{23}$	$8,28 \cdot 10^{22}$	$1,05 \cdot 10^{23}$	$2,85 \cdot 10^{21}$	$-1,46 \cdot 10^{22}$	$7,05 \cdot 10^{22}$	$-1,35 \cdot 10^{20}$	$1,92 \cdot 10^{22}$
13	$-4,98 \cdot 10^{23}$	—	$5,27 \cdot 10^{23}$	$-2,51 \cdot 10^{23}$	$-3,19 \cdot 10^{23}$	$-5,86 \cdot 10^{21}$	$4,43 \cdot 10^{22}$	$-2,88 \cdot 10^{23}$	$2,77 \cdot 10^{20}$	$-5,77 \cdot 10^{22}$
14	$9,20 \cdot 10^{23}$	—	$-9,72 \cdot 10^{23}$	$4,63 \cdot 10^{23}$	$5,88 \cdot 10^{23}$	$5,48 \cdot 10^{21}$	$-8,15 \cdot 10^{22}$	$8,05 \cdot 10^{23}$	$-2,59 \cdot 10^{20}$	$1,05 \cdot 10^{23}$
15	$-7,80 \cdot 10^{23}$	—	$8,24 \cdot 10^{23}$	$-3,92 \cdot 10^{23}$	$-4,98 \cdot 10^{23}$	—	$6,88 \cdot 10^{22}$	$-1,38 \cdot 10^{24}$	—	$-8,86 \cdot 10^{22}$
16	—	—	—	—	—	—	—	$1,09 \cdot 10^{24}$	—	—

Комбинированное опирание по контуру (рис. 1, четвертая схема)

1	$2,70 \cdot 10^8$	$-1,94 \cdot 10^8$	$-2,49 \cdot 10^8$	$6,75 \cdot 10^7$	$1,27 \cdot 10^8$	$-4,96 \cdot 10^7$	$-5,10 \cdot 10^6$	$-9,28 \cdot 10^7$	$2,47 \cdot 10^7$	$-1,18 \cdot 10^7$
2	$-5,61 \cdot 10^{10}$	$4,04 \cdot 10^{10}$	$5,16 \cdot 10^{10}$	$-1,41 \cdot 10^{10}$	$-2,64 \cdot 10^{10}$	$1,05 \cdot 10^{10}$	$1,08 \cdot 10^9$	$1,99 \cdot 10^{10}$	$-5,16 \cdot 10^9$	$2,44 \cdot 10^9$
3	$5,26 \cdot 10^{12}$	$-3,79 \cdot 10^{12}$	$-4,84 \cdot 10^{12}$	$1,34 \cdot 10^{12}$	$2,49 \cdot 10^{12}$	$-1,01 \cdot 10^{12}$	$-1,04 \cdot 10^{11}$	$-1,94 \cdot 10^{12}$	$4,87 \cdot 10^{11}$	$-2,26 \cdot 10^{11}$
4	$-2,96 \cdot 10^{14}$	$2,14 \cdot 10^{14}$	$2,72 \cdot 10^{14}$	$-7,61 \cdot 10^{13}$	$-1,41 \cdot 10^{14}$	$5,82 \cdot 10^{13}$	$5,96 \cdot 10^{12}$	$1,14 \cdot 10^{14}$	$-2,75 \cdot 10^{13}$	$1,26 \cdot 10^{13}$
5	$1,12 \cdot 10^{16}$	$-8,09 \cdot 10^{15}$	$-1,03 \cdot 10^{16}$	$2,91 \cdot 10^{15}$	$5,34 \cdot 10^{15}$	$-2,26 \cdot 10^{15}$	$-2,31 \cdot 10^{14}$	$-4,53 \cdot 10^{15}$	$1,05 \cdot 10^{15}$	$-4,72 \cdot 10^{14}$
6	$-3,03 \cdot 10^{17}$	$2,18 \cdot 10^{17}$	$2,78 \cdot 10^{17}$	$-7,92 \cdot 10^{16}$	$-1,44 \cdot 10^{17}$	$6,24 \cdot 10^{16}$	$6,36 \cdot 10^{15}$	$1,29 \cdot 10^{17}$	$-2,84 \cdot 10^{16}$	$1,26 \cdot 10^{16}$
7	$6,01 \cdot 10^{18}$	$-4,33 \cdot 10^{18}$	$-5,52 \cdot 10^{18}$	$1,59 \cdot 10^{18}$	$2,88 \cdot 10^{18}$	$-1,27 \cdot 10^{18}$	$-1,29 \cdot 10^{17}$	$-2,75 \cdot 10^{18}$	$5,67 \cdot 10^{17}$	$-2,46 \cdot 10^{17}$
8	$-8,94 \cdot 10^{19}$	$6,43 \cdot 10^{19}$	$8,21 \cdot 10^{19}$	$-2,38 \cdot 10^{19}$	$-4,30 \cdot 10^{19}$	$1,93 \cdot 10^{19}$	$1,96 \cdot 10^{18}$	$4,42 \cdot 10^{19}$	$-8,47 \cdot 10^{18}$	$3,60 \cdot 10^{18}$
9	$1,00 \cdot 10^{21}$	$-7,19 \cdot 10^{20}$	$-9,21 \cdot 10^{20}$	$2,69 \cdot 10^{20}$	$4,84 \cdot 10^{20}$	$-2,22 \cdot 10^{20}$	$-2,24 \cdot 10^{19}$	$-5,44 \cdot 10^{20}$	$9,53 \cdot 10^{19}$	$-3,97 \cdot 10^{19}$
10	$-8,42 \cdot 10^{21}$	$6,03 \cdot 10^{21}$	$7,76 \cdot 10^{21}$	$-2,28 \cdot 10^{21}$	$-4,09 \cdot 10^{21}$	$1,91 \cdot 10^{21}$	$1,92 \cdot 10^{20}$	$5,12 \cdot 10^{21}$	$-8,05 \cdot 10^{20}$	$3,29 \cdot 10^{20}$
11	$5,24 \cdot 10^{22}$	$-3,74 \cdot 10^{22}$	$-4,84 \cdot 10^{22}$	$1,43 \cdot 10^{22}$	$2,56 \cdot 10^{22}$	$-1,22 \cdot 10^{22}$	$-1,22 \cdot 10^{21}$	$-3,67 \cdot 10^{22}$	$5,03 \cdot 10^{21}$	$-2,01 \cdot 10^{21}$
12	$-2,34 \cdot 10^{23}$	$1,66 \cdot 10^{23}$	$2,17 \cdot 10^{23}$	$-6,40 \cdot 10^{22}$	$-1,15 \cdot 10^{23}$	$5,57 \cdot 10^{22}$	$5,54 \cdot 10^{21}$	$1,96 \cdot 10^{23}$	$-2,26 \cdot 10^{22}$	$8,82 \cdot 10^{21}$
13	$7,09 \cdot 10^{23}$	$-5,03 \cdot 10^{23}$	$-6,59 \cdot 10^{23}$	$1,95 \cdot 10^{23}$	$3,51 \cdot 10^{23}$	$-1,73 \cdot 10^{23}$	$-1,71 \cdot 10^{22}$	$-7,60 \cdot 10^{23}$	$6,87 \cdot 10^{22}$	$-2,63 \cdot 10^{22}$
14	$-1,31 \cdot 10^{24}$	$9,23 \cdot 10^{23}$	$1,22 \cdot 10^{24}$	$-3,62 \cdot 10^{23}$	$-6,52 \cdot 10^{23}$	$3,26 \cdot 10^{23}$	$3,20 \cdot 10^{22}$	$2,01 \cdot 10^{24}$	$-1,27 \cdot 10^{23}$	$4,76 \cdot 10^{22}$
15	$1,11 \cdot 10^{24}$	$-7,77 \cdot 10^{23}$	$-1,04 \cdot 10^{24}$	$3,08 \cdot 10^{23}$	$5,56 \cdot 10^{23}$	$-2,82 \cdot 10^{23}$	$-2,75 \cdot 10^{22}$	$-3,26 \cdot 10^{24}$	$1,08 \cdot 10^{23}$	$-3,96 \cdot 10^{22}$
16	—	—	—	—	—	—	—	$2,43 \cdot 10^{24}$	—	—

МИКФ с результатами расчетов по МКЭ для пластинок с шагом 0,1, 0,2, ..., 1:

- для первой схемы максимальная разница не превышает 2,89 %;
- для второй схемы максимальная разница не превышает 5,52 %, средняя разница 1,29 %;
- для третьей схемы не превышает 8,64 %, средняя разница 1,49 %;
- для четвертой схемы не превышает 5,46 %, средняя разница 1,05 %.

Для нахождения значений критических сил, соответствующих потере устойчивости пластин с промежуточными значениями a/b , воспользуемся линейной интерполяцией:

$$K_N = C_1 + C_2 K_f, \quad (6)$$

где

$$C_1 = K_{N,1} - C_2 K_{f,1}, \quad C_2 = \frac{K_{N,2} - K_{N,1}}{K_{f,2} - K_{f,1}}. \quad (7)$$

В выражениях (6) и (7) $K_{N,1}$ и $K_{N,2}$ — известные значения критических сил для опорных пластин; $K_{f,1}$ и $K_{f,2}$ — соответствующие им коэффициенты формы. Сравнение вычисленных значений критических сил по методике МИКФ с результатами расчетов по МКЭ для пластинок с шагом 0,15, 0,25, ..., 0,95 следующее:

- для первой схемы максимальная разница не превышает 3,97 %;
- для второй схемы максимальная разница не превышает 10,26 %, средняя разница — 2,21 %;
- для третьей схемы максимальная разница не превышает 5,90 %, средняя разница — 1,40 %;
- для четвертой схемы максимальная разница не превышает 10,10 %, средняя разница — 1,88 %.

ВЫВОДЫ

МИКФ получил применение к решению задачи об устойчивости (определение критической силы) упругих ортотропных пластин, шарнирно опертых по двум противоположным сторонам при произвольной комбинации шарнирного опирания и жесткого закрепления по двум другим.

Для указанных условий закрепления на контуре получены функциональные зависимости для критической силы при потере устойчивости ортотропных пластин одной из базовых форм — прямоугольной. Параметрами в этих выражениях являются коэффициент формы и соотношения изгибных жесткостей.

Продemonстрировано применение МИКФ для расчета упругих ортотропных прямоугольных пластин из условия устойчивости, при этом опорные решения были найдены с использованием получен-

ных в работе функциональных зависимостей. Результаты расчета были сопоставлены с решениями по МКЭ и показали удовлетворительную точность.

Предложенный подход может быть распространен и на другие формы пластин, варианты условий их закрепления, а также виды загрузки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М. : Наука, 1967. 328 с.
2. Тимошенко С.П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. М. : Наука, 1971. 622 с.
3. Дмитриенко Ю.И. Теория устойчивости пластин, основанная на асимптотическом анализе уравнений теории устойчивости трехмерных упругих сред // Наука и инновации. 2015. № 9 (45). С. 1–26.
4. Белоус А.А., Белоус В.А. Устойчивость прямоугольных пластин за пределом упругости с учетом сжимаемости материала // Ученые записки ЦАГИ. 1977. Т. 8. № 6. С. 107–118.
5. Mijušković Olga, Ćorić B., Šćepanović B. Exact stress functions implementation in stability analysis of plates with different boundary conditions under uniaxial and biaxial compression // Thin-Walled Structures. 2014. Vol. 80. Pp. 192–206.
6. Катюшин В.В. Здания с каркасами из стальных рам переменного сечения. М. : Стройиздат, 2005. 652 с.
7. Коробко В.И. Применение изопериметрического метода к расчету устойчивости упругих пластин // Известия вузов. Строительство и архитектура. 1979. № 2. С. 58–62.
8. Анненков Л.В. Исследование устойчивости защемленной прямоугольной пластины, сжатой в одном направлении // Вестник Государственного университета морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова 2015. № 3. С. 48–53.
9. Лопатин А.В., Авакумов Р.В. Устойчивость ортотропной пластины с двумя свободными краями, нагруженной изгибающим моментом в плоскости // Вестник Сибирского государственного университета науки и технологий имени академика М.Ф. Решетнева. 2009. Т. 4. С. 28–31.
10. Морозов В.С., Образцов И.Ф. Расчет на устойчивость прямоугольных пластин при упругих и пластических деформациях // Ученые записки ЦАГИ. 1981. Т. 12. № 1. С. 10–111.
11. Siahraan R., Keerthan P., Mahendran M. Finite element modeling of rivet fastened rectangular hollow flange channel beams subject to local buckling. Engineering Structures. 2016. Vol. 126. Pp. 311–327.
12. Ragheb W.F. Estimating the local buckling capacity of structural steel I-section columns at elevated temperatures // Thin-Walled Structures. 2016. Vol. 107. Pp. 18–27.
13. Lam A.C.C., Yanyang Zhang, Yi Qin et al. Design for inelastic local web buckling of coped beams // Journal of Constructional Steel Research. 2016. Vol. 125. Pp. 173–89.
14. Коробко А.В. Геометрическое моделирование формы области в двумерных задачах теории упругости. М. : Изд-во АСВ, 1999. 320 с.
15. Шляхов С.В. Применение методики МИКФ для расчета треугольных и прямоугольных пластинок с использованием широко известных геометрических параметров // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. № 4. С. 19–29.
16. Коробко А.В., Чукулаев А.В. Расчет устойчивости прямоугольной в плане полой оболочки методом интерполяции по коэффициенту формы // Строительство и транспорт. 2006. № 3–4. С. 36–39.
17. Коробко А.В., Чукулаев А.В. Решение задачи устойчивости сферической оболочки // Строительство и транспорт. 2007. № 4–16. С. 44–47.
18. Савин С.Ю., Ивлев И.А. Решение задачи об устойчивости прямоугольной пластины // Строительство-2016 : мат. II Брянского междунар. инноват. форума. Т. 1. Брянск : БГИТУ, 2016. С. 298–301.
19. Савин С.Ю., Ивлев И.А. Решение задачи о свободных колебаниях ортотропной параллелограммной пластины с использованием коэффициента формы // Строительство и реконструкция. 2017. № 1 (69). С. 67–75.
20. Коробко В.И., Савин С.Ю. Изгиб ортотропных пластинок в виде параллелограмма с однородными и комбинированными граничными условиями // Строительная механика и расчет сооружений. 2012. № 2. С. 18–22.
21. Коробко А.В., Савин С.Ю., Филатова С.А. Определение жесткости и основной частоты колебаний защемленных по контуру пластинок // Известия высших учебных заведений. Технология текстильной промышленности. 2016. № 3 (363). С. 290–295.
22. Коробко В.И. Строительная механика пластинок: Техническая теория. М. : Изд. дом «Спектр», 2010. 410 с.

Поступила в редакцию 3 апреля 2017 г.

Принята в доработанном виде 17 июля 2017 г.

Одобрена для публикации 31 октября 2017 г.

О Б АВТОРАХ: **Савин Сергей Юрьевич** — кандидат технических наук, доцент факультета строительства и архитектуры, **Юго-Западный государственный университет (ЮЗГУ)**, 305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, д. 94; suwin@yandex.ru;

Ивлёв Иван Андреевич — аспирант кафедры уникальных зданий и сооружений, **Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева (ОГУ имени И.С. Тургенева)**, 302026, г. Орел, ул. Комсомольская, д. 95; ivan542009@rambler.ru.

REFERENCES

1. Vol'mir A.S. *Ustoychivost' deformiruemyykh sistem* [Stability of deformable systems]. Moscow, Nauka Publ., 1967. 328 p. (In Russian)
2. Timoshenko S.P. *Ustoychivost' sterzhney, plastin i obolochek* [Stability of rods, plates and shells]. Moscow, Nauka Publ., 1971. 622 p. (In Russian)
3. Dmitrienko Yu.I. Teoriya ustoychivosti plastin, osnovannaya na asimptoticheskom analize uravneniy teorii ustoychivosti trekhmernyykh uprugikh sred [Theory of plates stability, based on asymptotic analysis of stability theory equations for three-dimensional elastic bodies]. *Nauka i innovatsii* [Science and Innovations]. 2015, no. 9 (45), pp. 1–26. (In Russian)
4. Belous A.A., Belous V.A. Ustoychivost' pryamougol'nykh plastin za predelom uprugosti s uchetom szhimaemosti materiala [Stability of rectangular plates beyond the elastic limit, taking into account the compressibility of the material]. *Uchenye zapiski TsAGI* [TsAGI Science Journal]. 1977, vol. 8, no. 6, pp. 107–118. (In Russian)
5. Mijušković O., Ćorić B., Šćepanović B. Exact stress functions implementation in stability analysis of plates with different boundary conditions under uniaxial and biaxial compression. *Thin-Walled Structures*. 2014, vol. 80, pp. 192–206.
6. Katyushin V.V. *Zdaniya s karkasami iz stal'nykh ram peremennogo secheniya* [Buildings with steel frames of variable cross section]. Moscow, Stroyizdat Publ., 2005. 652 p. (In Russian)
7. Korobko V.I. Primenenie izoperimetricheskogo metoda k raschetu ustoychivosti uprugikh plastin [Isoperimetric solution to the stability problem of elastic plates]. *Izvestiya vuzov. Stroitel'stvo i arkhitektura* [News of the Universities of Universities. Construction and Architecture]. 1979, no. 2, pp. 58–62. (In Russian)
8. Annenkov L.V. Issledovanie ustoychivosti zashchemlennoy pryamougol'noy plastiny, szhatoy v odnom napravlenii [Explore of stability of clamped rectangular plate, compressed in one direction]. *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota im. admirala S.O. Makarova* [Bulletin of the State University of Marine and River Fleet Named after Admiral S.O. Makarov]. 2015, no. 3, pp. 48–53. (In Russian)
9. Lopatin A.V., Avakumov R.V. Ustoychivost' ortotropnoy plastiny s dvumya svobodnymi krayami, nagruzhennoy izgbayushchim momentom v ploskosti [Buckling of orthotropic plates with two free edges loaded with pure in-plane bending moment]. *Vestnik Sibirskogo gosudarstvennogo universiteta nauki i tekhnologii imeni akademika M.F. Reshetneva* [Bulletin of the Siberian State University of Science and Technology named after Academician M.F. Reshetnev]. 2009, vol. 1, no. 13, pp. 35–36. (In Russian)
10. Morozov V.S., Obratsov I.F. Raschet na ustoychivost' pryamougol'nykh plastin pri uprugikh i plasticheskikh deformatsiyakh [Stability of an orthotropic plate with two free edges loaded with a bending moment in the plane]. *Uchenye zapiski TsAGI* [TsAGI Science Journal]. 1981, vol. 12, no. 1, pp. 10–111. (In Russian)
11. Siahman R., Keerthan P., Mahendran M. Finite element modeling of rivet fastened rectangular hollow flange channel beams subject to local buckling. *Engineering Structures*. 2016, vol. 126, pp. 311–327.
12. Ragheb W.F. Estimating the local buckling capacity of structural steel I-section columns at elevated temperatures. *Thin-Walled Structures*. 2016, vol. 107, pp. 18–27.
13. Lam A.C.C., Yanyang Zhang, Yi Qin et al. Design for inelastic local web buckling of coped beams. *Journal of Constructional Steel Research*. 2016, vol. 125, pp. 173–189.
14. Korobko A.V. *Geometricheskoe modelirovanie formy oblasti v dvumernyykh zadachakh teorii uprugosti* [Geometric modeling of the shape of a domain in two-dimensional problems of the elasticity theory]. Moscow, ASV Publ., 1999. 320 p. (In Russian)
15. Shlyakhov S.V. Primenenie metodiki MIKF dlya rascheta treugol'nykh i pryamougol'nykh plastinok s ispol'zovaniem shiroko izvestnykh geometricheskikh parametrov [Application of the method of interpolation method by the shape factor for the calculation of triangular and rectangular plates using widely known geometric parameters]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy* [Construction Mechanics and Design of Structures]. 2016, no. 4, pp. 19–29. (In Russian)
16. Korobko A.V., Chikulaev A.V. Raschet ustoychivosti pryamougol'noy v plane pologoy obolochki metodom interpolatsii po koeffitsientu formy [Calculation of the stability of a rectangular planar shell in the plan by the method of interpolation by the shape coefficient]. *Stroitel'stvo i transport* [Construction and Transport]. 2006, no. 3–4, pp. 36–39. (In Russian)
17. Korobko A.V., Chikulaev A.V. Reshenie zadachi ustoychivosti sfericheskoy obolochki [Solution of the problem of stability of a spherical shell]

tion of the stability problem of the spherical shell]. *Stroitel'stvo i transport* [Construction and Transport]. 2007, no. 4–16, pp. 44–47. (In Russian)

18. Savin S.Yu., Ivlev I.A. Reshenie zadachi ob ustoychivosti pryamougol'noy plastiny [Solution of the problem of the stability of a rectangular plate]. *Stroitel'stvo-2016 : materialy II Bryanskogo Mezhdunarodnogo Innovatsionnogo Foruma* [Construction-2016: Proceedings of the II Bryansk International Innovation Forum]. Vol. 1. Bryansk, Bryansk state Engineering and Technical University, 2016. Pp. 298–301. (In Russian)

19. Savin S.Yu., Ivlev I.A. Reshenie zadachi o svobodnykh kolebaniyakh ortotropnoy parallelogrammnoy plastiny s ispol'zovaniem koeffitsienta formy [Solution to the free vibration problem for orthotropic parallelogram plate, using form factor]. *Stroitel'stvo i rekonstruktsiya* [Building and Reconstruction]. 2017, no. 1 (69), pp. 67–75. (In Russian)

20. Korobko V.I., Savin S.Yu. Izgib ortotropnykh plastinok v vide parallelogramma s odnorodnymi i

kombinirovannymi granichnymi usloviyami [Bending of orthotropic plates in the form of a parallelogram with homogeneous and combined boundary conditions]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy* [Structural Mechanics and Analysis of Constructions]. 2012, no. 2, pp. 18–22. (In Russian)

21. Korobko A.V., Savin S.Yu., Filatova S.A. Opredelenie zhestkosti i osnovnoy chastoty kolebaniy zashchemlennykh po konturu plastinok [Determination of the stiffness and fundamental vibration frequency of plates clamped along the contour]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Tekhnologiya tekstil'noy promyshlennosti* [News of the Universities. Technology of the Textile Industry]. 2016, no. 3 (363), pp. 290–295. (In Russian)

22. Korobko V.I. *Stroitel'naya mekhanika plastinok: Tekhnicheskaya teoriya* [Technology of the textile industry]. Moscow, «Spektr» Publishing house, 2010. 410 p. (In Russian)

Received April 3, 2017

Adopted in revised form on July 17, 2017

Approved for publication on October 31, 2017

ABOUT THE AUTHORS: **Savin Sergey Yur'evich** — Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, **South-West State University (SWSU)**, 94 50 let Oktyabrya str., Kursk, 305040, Russian Federation; suwin@yandex.ru;

Ivlev Ivan Andreevich — Post-graduate Student, **Orel State University named after I.S. Turgenev**, 95 Komsomol'skaya str., Orel, 302026, Russian Federation; ivan542009@rambler.ru.