УДК 539.3

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ ПРИ ЛИНЕЙНОМ СМЕЩЕНИИ УЧАСТКА ЕЕ ГРАНИЦЫ

А.Н. Богомолов, А.Н. Ушаков

*Институт архитектуры и строительства Волгоградский государственный технический университет
(ИАуС ВолГТУ), 400074, г. Волгоград, ул. Академическая, д. 1*

Аннотация. Нагрузки вызывают вертикальные смещения оснований всех сооружений, от величины которых зависит безопасная эксплуатация зданий. В статье приведено решение задачи о распределении напряжений в однородном и изотропном грунтовом массиве при вертикальном линейном смещении участка его границы, полученное методом комплексных потенциалов. В замкнутом виде определены выражения для компонент напряжения и компонент деформации второй основной граничной задачи плоской теории упругости для полуплоскости при линейном смещении (законе линейного смещения) участка ее границы. Построены картины изолиний компонент напряжения и деформации, из которых видно, что численные значения всех одноименных компонент, находящихся в соответствующих точках по разные стороны оси симметрии, равны по величине и противоположны по знаку. Получена формула осадки, возникающей при смещении участка границы полуплоскости. Величина осадки прямо пропорциональна величине смещения участка границы и обратно пропорциональна величине коэффициента бокового давления грунта.

Приведены таблицы значений вертикальных напряжений и осадки для глинистого и песчаного грунтов.

Ключевые слова: напряжения, деформации, смещение участка границы полуплоскости, коэффициент бокового давления грунта, осадки оснований, полуплоскость, грунт

DOI: 10.22227/1997-0935.2017.2.184-192

STRESS-STRAIN STATE OF AN ELASTIC HALF-PLANE AT A LINEAR SHIFT OF A PART OF ITS BOUNDARY

A.N. Bogomolov, A.N. Ushakov

*Institute of Architecture and Civil Engineering of Volgograd State Technical University (IACE VSTU),
1 Akademicheskaya str., Volgograd, 400074, Russian Federation*

Abstract. Loads cause vertical shifts of foundations of all structures, and the safe operation of buildings depends on the value thereof. The article presents a solution of the problem of stress distribution in a homogeneous and isotropic soil mass under vertical linear shift of a part of its boundary obtained by the complex potentials method. Expressions for stress components and strain components of the second basic boundary plane problem of the theory of elasticity for half-plane at the linear shift (the law of linear shift) of a part of its boundary are determined in a closed form. Patterns of isolines of stress and strain components are built; they illustrate that numerical values of all like-named components located at corresponding points on opposite sides of the symmetry axis are equal in value but opposite in sign. The formula of subsidence that occurs at the shift of the half-plane boundary part was derived. The value of subsidence is directly proportional to the boundary part shift value and inversely proportional to the lateral soil pressure coefficient value. Conclusions: expressions for stress and strain components of the second basic boundary plane problem of the theory of elasticity for half-plane are obtained in a closed form. Values of the stress and strain components are symmetric relative to the origin and opposite in sign; the formula of subsidence for half-plane boundary vertical shift is obtained on the basis of the expression for the vertical strain component.

Key words: stresses, strains, half-plane boundary part shift, lateral soil pressure coefficient, subsidences of foundations, half-plane, soil

Под действием различных нагрузок основания всех сооружений претерпевают большие или меньшие вертикальные смещения, которые обычно называют осадками. Долговременная безопасная эксплуатация сооружений будет обеспечена, если величины этих осадок не превышают заранее заданные допустимые значения. По этой причине расчет деформаций оснований сооружений является одной из наиболее важных задач механики грунтов.

Расчет осадки осуществляется в рамках определенной модели. Многочисленными экспериментами установлено [1], что деформации грунтов под фундаментами развиваются в основном в верхней зоне основания, поэтому для анализа процесса осадки сооружения могут быть применены модели, основанные на решениях задач теории упругости [1–5].

Самое широкое распространение в инженерной практике получила модель линейно-деформируемой среды, позволяющая проводить анализ напряженно-деформированного состояния грунтовых массивов, привлекая для этого методы линейной теории упругости [6–10]. Одним из наиболее эффективных методов решения плоских задач теории упругости является метод комплексных потенциалов, разработанный Г.В. Колосовым [11], существенно дополненный Н.И. Мусхелишвили [12] и нашедший важные применения в механике деформируемого твердого тела и ее приложениях [13–19]. Методом комплексных потенциалов был решен ряд актуальных задач геомеханики, связанных с исследованием напряженно-деформированного состояния грунтовых массивов [20–22].

В статье [23] приведено решение задачи об определении полной осадки основания незаглубленного ленточного фундамента, полученное с помощью подхода, предложенного авторами работы [21], который учитывает дополнительные напряжения, возникающие в грунтовом массиве вследствие вертикального равномерного смещения (осадки) нагруженного участка границы.

Вместе с тем на практике гораздо чаще смещения являются неравномерными, в результате чего возникают крены, прогибы и выгибы сооружений.

В данной работе в рамках модели линейно-деформируемой среды рассмотрена задача о распределении напряжений в грунтовом массиве при вертикальном линейном смещении (законе линейного смещения) участка его границы. Решение задачи проведено методом комплексных потенциалов Колосова-Мусхелишвили.

Граничное условие для второй основной плоской задачи теории упругости в случае полуплоскости имеет вид [12]

$$\Re \varphi(t) - t \overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)} = 2\mu (g_1(t) + ig_2(t)),$$

или

$$\Re \overline{\varphi(t)} - t \varphi'(t) - \psi(t) = 2\mu (g_1(t) - ig_2(t)),$$

где $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ — граничные значения функций $\varphi(z)$, $\psi(z)$, $\varphi'(z)$, $\psi'(z)$, голоморфных в нижней полуплоскости; μ и $\Re$ — упругие постоянные, причем $\Re = 3 - 4\nu$, где ν — коэффициент Пуассона, связанный с коэффициентом бокового давления ξ_0 соотношением $\xi_0 = \nu(1 - \nu)^{-1}$.

Решение задачи дают формулы для функций напряжения $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, полученные Н.И. Мусхелишвили [12], при этом:

$$\varphi'(z) = -\frac{\mu}{\pi \Re i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g_1(t) + ig_2(t)}{(t-z)^2} dt; \quad (1)$$

$$\psi'(z) = \frac{\mu}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g_1(t) - ig_2(t)}{(t-z)^2} dt - \varphi'(z) - z\varphi''(z). \quad (2)$$

Пусть отрезок $-a \leq t \leq a$ оси Ox подвержен вертикальному линейному смещению (закон линейного смещения)

$$g(t) = g_1(t) + ig_2(t) = -i\frac{\gamma}{a}t, \quad (3)$$

где γ — заданное положительное действительное число и $g(t) = 0$ при остальных значениях t .

Определим напряженное состояние в нижней полуплоскости.

Формулы (1) и (2) с учетом (3) дают:

$$\varphi'(z) = \frac{\mu\gamma}{\pi \Re a} \int_{-a}^a \frac{tdt}{(t-z)^2} = \frac{\mu\gamma}{\pi \Re a} \left(\ln \frac{z-a}{z+a} + \frac{2az}{z^2-a^2} \right);$$

$$\varphi''(z) = -\frac{4\mu\gamma a^2}{\pi \Re (z^2-a^2)^2};$$

$$\begin{aligned} \psi'(z) &= \frac{\mu\gamma}{\pi a} \int_{-a}^a \frac{tdt}{(t-z)^2} - \varphi'(z) - z\varphi''(z) = \\ &= \frac{\mu\gamma}{\pi a} \frac{\Re-1}{\Re} \left(\ln \frac{z-a}{z+a} + \frac{2az}{z^2-a^2} \right) + \\ &+ \frac{4\mu\gamma a^2 z}{\pi \Re (z^2-a^2)^2}. \end{aligned}$$

Следуя [12], под выражением $\ln \frac{z-a}{z+a}$ бу-

дем понимать приращение функции $\ln(z-t)$ при непрерывном изменении t от $-a$ до a , т.е.

$$\ln \frac{z-a}{z+a} = \ln \frac{\rho_1}{\rho_2} - i(\theta_1 - \theta_2), \quad (4)$$

где

$$\rho_1 = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}, \quad \rho_2 = \sqrt{(x+a)^2 + y^2}; \quad (5)$$

$$\theta_1 - \theta_2 = \arctg\left(\frac{a-x}{|y|}\right) + \arctg\left(\frac{a+x}{|y|}\right). \quad (6)$$

Вычислим компоненты напряжения. Согласно [12], имеем:

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 4\operatorname{Re}\varphi'(z) = \\ &= \frac{4\mu\gamma}{\pi\aleph a} \left(\ln \frac{\rho_1}{\rho_2} + \frac{2ax(x^2 + y^2 - a^2)}{(x^2 + y^2 - a^2)^2 + 4a^2y^2} \right); \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= 2(\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)) = \\ &= \frac{2\mu\gamma}{\pi a} \frac{\aleph - 1}{\aleph} \left(\ln \frac{z-a}{z+a} + \frac{2az}{z^2 - a^2} \right) + \frac{16\mu\gamma a^2 iy}{\pi\aleph(z^2 - a^2)^2}, \end{aligned}$$

откуда, с учетом (4)–(6), получаем:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\mu\gamma}{\pi a} \frac{3 - \aleph}{\aleph} \left(\ln \sqrt{\frac{(x-a)^2 + y^2}{(x+a)^2 + y^2}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2ax(x^2 + y^2 - a^2)}{(x^2 + y^2 - a^2)^2 + 4a^2y^2} \right) + \\ &\quad + \frac{4\mu\gamma y}{\pi\aleph} \left(\frac{2xy}{(x^2 + y^2 - a^2)^2 + 4a^2y^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{4xy(y^2 - x^2 - a^2)(x^2 - y^2 - a^2) +}{((x^2 + y^2 - a^2)^2 + 4a^2y^2)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2xy((x^2 - y^2 - a^2)^2 - 4x^2y^2)}{((x^2 + y^2 - a^2)^2 + 4a^2y^2)^2} \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_y &= \frac{\mu\gamma}{\pi a} \frac{1 + \aleph}{\aleph} \left(\ln \sqrt{\frac{(x-a)^2 + y^2}{(x+a)^2 + y^2}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2ax(x^2 + y^2 - a^2)}{(x^2 + y^2 - a^2)^2 + 4a^2y^2} \right) - \\ &\quad - \frac{4\mu\gamma y}{\pi\aleph} \left(\frac{2xy}{(x^2 + y^2 - a^2)^2 + 4a^2y^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{4xy(y^2 - x^2 - a^2)(x^2 - y^2 - a^2) +}{((x^2 + y^2 - a^2)^2 + 4a^2y^2)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2xy((x^2 - y^2 - a^2)^2 - 4x^2y^2)}{((x^2 + y^2 - a^2)^2 + 4a^2y^2)^2} \right); \\ \tau_{xy} &= -\frac{\mu\gamma}{\pi a} \frac{\aleph - 1}{\aleph} \left(\arctg\left(\frac{a-x}{|y|}\right) + \arctg\left(\frac{a+x}{|y|}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2ay(x^2 + y^2 + a^2)}{(x^2 + y^2 - a^2)^2 + 4a^2y^2} \right) - \\ &\quad - \frac{4\mu\gamma y}{\pi\aleph} \left(\frac{x^2 - y^2 - a^2}{(x^2 + y^2 - a^2)^2 + 4a^2y^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(y^2 - x^2 - a^2)}{((x^2 + y^2 - a^2)^2 + 4a^2y^2)^2} \times \right. \\ &\quad \left. \times \frac{((x^2 - y^2 - a^2)^2 - 4x^2y^2) - 8x^2y^2(x^2 - y^2 - a^2)}{((x^2 + y^2 - a^2)^2 + 4a^2y^2)^2} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

На рис. 1 приведены изолинии компонент напряжения, построенные на основании формул (7) при $\gamma = 1$, $a = 10$, $\nu = 0,42$ (глинистый грунт).

Рис. 1. Изолинии горизонтального (а), вертикального (б) и касательного (в) напряжений

Fig. 1. Isolines of horizontal (a), vertical (b) and tangential (c) stresses

Перепишем компоненты напряжения (7) в безразмерном виде. Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_x}{\mu} &= \frac{\gamma_a}{\pi} \frac{3-\aleph}{\aleph} \left[\ln \sqrt{\frac{(x_a-1)^2+y_a^2}{(x_a+1)^2+y_a^2}} + \frac{2x_a(x_a^2+y_a^2-1)}{(x_a^2+y_a^2-1)^2+4y_a^2} \right] + \\ &+ \frac{4\gamma_a y_a}{\pi \aleph} \left[\frac{2x_a y_a}{(x_a^2+y_a^2-1)^2+4y_a^2} + \frac{4x_a y_a(y_a^2-x_a^2-1)(x_a^2-y_a^2-1)}{((x_a^2+y_a^2-1)^2+4y_a^2)^2} + \right. \\ &\left. + \frac{2x_a y_a((x_a^2-y_a^2-1)-4x_a^2 y_a^2)}{((x_a^2+y_a^2-1)^2+4y_a^2)^2} \right]; \\ \frac{\sigma_y}{\mu} &= \frac{\gamma_a}{\pi} \frac{1+\aleph}{\aleph} \left[\ln \sqrt{\frac{(x_a-1)^2+y_a^2}{(x_a+1)^2+y_a^2}} + \frac{2x_a(x_a^2+y_a^2-1)}{(x_a^2+y_a^2-1)^2+4y_a^2} \right] - \\ &- \frac{4\gamma_a y_a}{\pi \aleph} \left[\frac{2x_a y_a}{(x_a^2+y_a^2-1)^2+4y_a^2} + \frac{4x_a y_a(y_a^2-x_a^2-1)(x_a^2-y_a^2-1)}{((x_a^2+y_a^2-1)^2+4y_a^2)^2} + \right. \\ &\left. + \frac{2x_a y_a((x_a^2-y_a^2-1)^2-4x_a^2 y_a^2)}{((x_a^2+y_a^2-1)^2+4y_a^2)^2} \right]; \\ \frac{\tau_{xy}}{\mu} &= -\frac{\gamma_a}{\pi} \frac{\aleph-1}{\aleph} \left[\arctg\left(\frac{1-x_a}{|y_a|}\right) - \arctg\left(\frac{1+x_a}{|y_a|}\right) - \right. \\ &+ \frac{2y_a(x_a^2+y_a^2+1)}{(x_a^2+y_a^2-1)^2+4y_a^2} - \\ &- \frac{4\gamma_a y_a}{\pi \aleph} \left(\frac{x_a^2-y_a^2-1}{(x_a^2+y_a^2-1)^2+4y_a^2} + \right. \\ &\left. + \frac{(1-x_a^2+y_a^2)}{((x_a^2+y_a^2-1)^2+4y_a^2)^2} \times \right. \\ &\left. \times \frac{((x_a^2-y_a^2-1)^2-4x_a^2 y_a^2)-8x_a^2 y_a^2(x_a^2-y_a^2-1)}{((x_a^2+y_a^2-1)^2+4y_a^2)^2} \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

где $\gamma_a = \gamma/a$, $x_a = x/a$, $y_a = y/a$ — безразмерные величины.

Ниже приведены вычисления значений вертикальных напряжений вида σ_y/μ в точках полуплоскости при двух значениях коэффициента Пуассона. Результаты вычислений сведены в табл. 1. Заметим, что приведенные в таблицах значения компоненты вертикального напряжения имеют отрицательный знак.

Для определения компонент деформации воспользуемся известными формулами [12]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{2\mu} (\sigma_x - \nu(\sigma_x + \sigma_y)); \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{2\mu} (\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_y)); \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{2\mu} \tau_{xy}, \end{aligned} \quad (9)$$

которые дают:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{2\gamma y}{\pi \aleph} \left[\frac{2xy}{(x^2+y^2-a^2)^2+4a^2 y^2} + \frac{4xy(y^2-x^2-a^2)(x^2-y^2-a^2)}{((x^2+y^2-a^2)^2+4a^2 y^2)^2} + \right. \\ &\left. + \frac{2xy((x^2-y^2-a^2)^2-4x^2 y^2)}{((x^2+y^2-a^2)^2+4a^2 y^2)^2} \right]; \\ \varepsilon_y &= \frac{2\gamma}{\pi a} \frac{1-2\nu}{\aleph} \left[\ln \sqrt{\frac{(x-a)^2+y^2}{(x+a)^2+y^2}} + \frac{2ax(x^2+y^2-a^2)}{(x^2+y^2-a^2)^2+4a^2 y^2} \right] - \\ &- \frac{2\gamma y}{\pi \aleph} \left[\frac{2xy}{(x^2+y^2-a^2)^2+4a^2 y^2} + \frac{4xy(y^2-x^2-a^2)(x^2-y^2-a^2)}{((x^2+y^2-a^2)^2+4a^2 y^2)^2} + \right. \\ &\left. + \frac{2xy((x^2-y^2-a^2)^2-4x^2 y^2)}{((x^2+y^2-a^2)^2+4a^2 y^2)^2} \right]; \end{aligned} \quad (10)$$

Табл. 1. Значения напряжения σ_y/μ
Table 1. Values of stress σ_y/μ

y/a	x/a									
	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$\gamma = 1, \nu = 0,42$ (глинистый грунт / clay soil)										
0,0	0,000	0,225	0,459	0,715	1,000	1,360	1,824	2,506	3,715	6,947
0,1	0,000	0,228	0,466	0,727	1,026	1,394	1,885	2,626	3,960	6,607
0,3	0,000	0,243	0,498	0,775	1,091	1,464	1,910	2,412	2,800	2,560
0,5	0,000	0,242	0,491	0,749	1,018	1,291	1,541	1,713	1,712	1,452
0,7	0,000	0,214	0,428	0,637	0,835	1,008	1,135	1,189	1,144	0,991
1,0	0,000	0,151	0,297	0,432	0,550	0,641	0,700	0,719	0,694	0,630
$\gamma = 1, \nu = 0,3$ (песчаный грунт / sandy soil)										
0,0	0,000	0,199	0,407	0,632	0,891	1,204	1,614	2,218	3,288	6,148
0,1	0,000	0,201	0,410	0,639	0,901	1,221	1,644	2,279	3,374	5,446
0,3	0,000	0,207	0,423	0,656	0,920	1,226	1,586	1,981	2,275	2,072
0,5	0,000	0,199	0,403	0,614	0,831	1,049	1,246	1,379	1,375	1,170
0,7	0,000	0,172	0,344	0,511	0,668	0,805	0,906	0,948	0,913	0,794
1,0	0,000	0,119	0,234	0,341	0,433	0,506	0,552	0,567	0,549	0,500

$$\gamma_{xy} = -\frac{\gamma}{2\pi a} \frac{\aleph-1}{\aleph} \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{a-x}{|y|} \right) + \operatorname{arctg} \left(\frac{a+x}{|y|} \right) + \frac{2ay(x^2+y^2+a^2)}{(x^2+y^2-a^2)^2+4a^2y^2} - \frac{2\gamma y}{\pi \aleph} \left(\frac{x^2-y^2-a^2}{(x^2+y^2-a^2)^2+4a^2y^2} + \frac{(y^2-x^2-a^2)}{\left((x^2+y^2-a^2)^2+4a^2y^2\right)^2} \times \frac{\left((x^2-y^2-a^2)^2-4x^2y^2\right)-8x^2y^2(x^2-y^2-a^2)}{\left((x^2+y^2-a^2)^2+4a^2y^2\right)^2} \right) \right)$$

На рис. 2 приведены изолинии компонент деформации, построенные на основании формул (10) при $\gamma=1$, $a=10$, $\nu=0,42$ (глинистый грунт).

Теперь перейдем к вычислению осадки грунтового массива, воспользовавшись для этого формулой Штейнбрэннера [10]:

$$s = \int_0^y \varepsilon_y dy = H(x, 0) - H(x, y), \quad (11)$$

где $H(x, y)$ — вертикальное перемещение в точке с координатами (x, y) , а y , например, глубина сжимаемого слоя.

Имеем

$$s = \frac{2\gamma}{\pi a} \frac{1-2\nu}{\aleph} \int_0^y \left(\frac{\ln \sqrt{\frac{(x-a)^2+y^2}{(x+a)^2+y^2}} + \frac{2ax(x^2+y^2-a^2)}{(x^2+y^2-a^2)^2+4a^2y^2}}{\left((x^2+y^2-a^2)^2+4a^2y^2\right)^2} - \frac{4\gamma x}{\pi \aleph} \int_0^y y^2 \left(\frac{1}{(x^2+y^2-a^2)^2+4a^2y^2} + \frac{(y^2-x^2-a^2)}{\left((x^2+y^2-a^2)^2+4a^2y^2\right)^2} + \frac{\left((x^2-y^2-a^2)^2-4x^2y^2\right)}{\left((x^2+y^2-a^2)^2+4a^2y^2\right)^2} \right) dy \right) dy.$$

Вычисляя интеграл, получим

$$s = \frac{\gamma}{\pi \aleph a} \left((1-2\nu)y \ln \frac{(x+a)^2+y^2}{(x-a)^2+y^2} + \frac{2axy(x^2+y^2-a^2)}{(x^2+y^2-a^2)^2+4a^2y^2} + (3-4\nu)x \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{y}{x+a} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{y}{x-a} \right) \right) \right). \quad (12)$$

Ясно, что при $x=0$ осадка s будет равна нулю при любом значении глубины y . Заметим, что $s(x, y)$ является нечетной функцией своих аргументов x и y , причем при фиксированных значениях $y < 0$, а затем и при $x > 0$ $s(x, y)$ является монотонно убывающей функцией (рис. 3, 4).

Рис. 2. Изолинии горизонтальной (а), вертикальной (б) и касательной (в) деформаций

Fig. 2. Isolines of horizontal (a), vertical (b) and tangential (c) strains

Рис. 3. График осадки $s(x, y)$ при $y_0 = -1$ (а) и $y_0 = -9$ (б) для глинистого грунта ($v = 0,42$)

Fig. 3. Graph of subsidence $s(x, y)$ at $y_0 = -1$ (a) and $y_0 = -9$ (b) for clay soil ($v = 0,42$)

Рис. 4. График осадки $s(x_0, y)$ при $x_0 = 1$ (а) и $x_0 = 9$ (б) для глинистого грунта ($v = 0,42$)

Fig. 4. Graph of subsidence $s(x_0, y)$ at $x_0 = 1$ (a) and $x_0 = 9$ (b) for clay soil ($v = 0,42$)

Рис. 5. Изолинии осадки для глинистого грунта ($v = 0,42$) (а) и песчаного грунта ($v = 0,3$) (б)

Fig. 5. Isolines of subsidence for clay soil ($v = 0,42$) (a) and sandy soil ($v = 0,3$) (b)

Табл. 3. Значения осадки s
Table 3. Values of subsidence s

у	х									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\gamma = 1, a = 10, v = 0,42$ (глинистый грунт / clay soil)										
0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
1	0,000	0,003	0,007	0,010	0,015	0,020	0,027	0,040	0,065	0,152
2	0,000	0,007	0,014	0,023	0,033	0,046	0,065	0,098	0,163	0,309
3	0,000	0,011	0,024	0,039	0,056	0,080	0,114	0,167	0,258	0,409
4	0,000	0,018	0,037	0,058	0,084	0,119	0,166	0,235	0,336	0,479
5	0,000	0,024	0,050	0,080	0,115	0,159	0,217	0,295	0,399	0,532
$\gamma = 1, a = 10, v = 0,3$ (песчаный грунт / sandy soil)										
0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
1	0,000	0,006	0,012	0,018	0,026	0,035	0,047	0,066	0,101	0,198
2	0,000	0,012	0,024	0,038	0,054	0,073	0,100	0,140	0,212	0,356
3	0,000	0,018	0,038	0,059	0,084	0,114	0,156	0,215	0,308	0,454
4	0,000	0,025	0,052	0,081	0,115	0,157	0,211	0,283	0,384	0,521
5	0,000	0,033	0,067	0,104	0,147	0,198	0,261	0,342	0,445	0,572

На рис. 5 приведены изолинии осадки, построенные для двух типов грунтов на основании формулы (12) при $\gamma = 1, a = 10$.

Ниже приведена таблица 3 значений осадки для глинистого и песчаного грунтов с коэффициентами Пуассона, равными соответственно $v = 0,42$ и $v = 0,3$ при положительных значениях x . При отрицательных значениях x , ввиду нечетности функции $s(x, y)$, знак осадки необходимо изменить на противоположный.

Выводы:

- в замкнутом виде получены выражения для компонент напряжения и деформации вто-

рой основной граничной плоской задачи теории упругости для полуплоскости. При этом значения компонент напряжения и деформации симметричны относительно начала координат и противоположны друг другу по знаку;

- на основе выражения для компоненты вертикальной деформации получена формула осадки для вертикального смещения границы полуплоскости. Величина осадки прямо пропорциональна величине смещения участка границы и обратно пропорциональна коэффициенту Пуассона (коэффициенту бокового давления) материала грунта.

ЛИТЕРАТУРА

1. Далматов Б.И. Механика грунтов, основания и фундаменты. Ленинград : Стройиздат, 1988. 415 с.
2. Цытович Н.А. Механика грунтов. 4-е изд., вновь перераб. и доп. М. : Госстройиздат, 1963. 636 с.
3. Кушнер С.Г. Расчет деформаций оснований зданий и сооружений. Запорожье : ИПО Запорожье, 2008. 496 с.
4. Иванов П.Л. Грунты и основания гидротехнических сооружений. М. : Высшая школа, 1985. 352 с.
5. Флорин В.А. Основы механики грунтов. Ленинград ; М. : Госстройиздат, 1959. Т. 1: Общие зависимости и напряженное состояние оснований сооружений. 1959. 357 с.
6. Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической теории упругости. М. : Наука, 1981. 688 с.
7. Хан Х. Теория упругости. Основы линейной теории и ее применения / пер. с нем. Е.А. Когана ; под ред. Э.И. Григолюка. М. : Мир, 1988. 344 с.
8. Murnaghan F.D. Finite deformation of elastic solid. New York : Wiley, 1951. 140 p.
9. Green A.E., Zerna W. Theoretical elasticity. Oxford : Clarendon Press, 1968. 457 p.
10. Poulos H.G., Davis E.H. Elastic solutions for soil and rock mechanics. New York : Wiley, 1974. 411 p.
11. Колосов Г.В. Применение комплексных диаграмм и теории функций комплексной переменной к теории упругости. М. ; Ленинград : Глав. ред. общетехн. дисциплин, 1935. 224 с.
12. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости: Основные

уравнения. Плоская теория упругости. Кручение и изгиб. 5-е изд., испр. и доп. М. : Наука, 1966. 707 с.

13. *Stevenson A.C.* Complex potential in two-dimensional elasticity // *Proc. Roy. Soc. Ser. A.* 1945. Vol. 184. No. 997. Pp. 129–179, 218–229.

14. *Савин Г.Н.* Распределение напряжений около отверстий. Киев : Наукова думка, 1968. 887 с.

15. *Каландия А.И.* Математические методы двумерной упругости. М. : Наука, 1973. 303 с.

16. *Космодамианский А.С.* Плоская задача теории упругости для пластин с отверстиями, вырезами и выступами. Киев : Вища школа, 1975. 227 с.

17. *Lu Jian-ke.* Complex variable methods in plane elasticity. World Scientific, 1995. 237 p.

18. *Akinola A.* On complex variable method in finite elasticity // *Applied Math.* 2009. No. 1.

Pp. 1–16. Режим доступа: http://file.scirp.org/pdf/AM20090100001_10535691.pdf.

19. *Chau K.T.* Analytical methods in geomechanics. CRC Press, 2012. 424 p.

20. *Тер-Мартirosян З.Г.* Механика грунтов. М. : Изд-во АСВ, 2009. 551 с. (Библиотека научных разработок и проектов МГСУ)

21. *Богомолов А.Н., Ушаков А.Н.* Методы теории функций комплексного переменного в задачах геомеханики. Волгоград : Перемена, 2014. 226 с.

22. *Verruijt A.* Stress due to gravity in a notched elastic half-plane // *Eng. Arch.* 1969. Vol. 38. No. 2. Pp. 107–118.

23. *Богомолов А.Н., Ушаков А.Н.* Задача о вычислении осадок ленточного фундамента // *Основания, фундаменты и механика грунтов.* 2011. № 6. С. 2–7.

Поступила в редакцию в октябре 2016 г.

Об авторах: **Богомолов Александр Николаевич** — доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой гидротехнических и земляных сооружений, заместитель директора по научной работе, **Институт архитектуры и строительства Волгоградский государственный технический университет (ИАиС ВолГТУ)**, 400074, г. Волгоград, ул. Академическая, д. 1, banzaritcyn@mail.ru;

Ушаков Андрей Николаевич — кандидат технических наук, доцент, профессор кафедры математики и информационных технологий, **Институт архитектуры и строительства Волгоградский государственный технический университет (ИАиС ВолГТУ)**, 400074, г. Волгоград, ул. Академическая, д. 1, ushakov.andrej2012@yandex.ru.

Для цитирования: *Богомолов А.Н., Ушаков А.Н.* Напряженно-деформированное состояние упругой полуплоскости при линейном смещении участка ее границы // *Вестник МГСУ.* 2017. Т. 12. Вып. 2 (101). С. 184–192. DOI: 10.22227/1997-0935.2017.2.184-192

REFERENCES

1. Dalmatov B.I. *Mekhanika gruntov, osnovaniya i fundamenty* [Soil Mechanics and Foundation Engineering]. Saint Petersburg, Stroyizdat Publ., 1988, 415 p. (In Russian)

2. Tsytoich N.A. *Mekhanika gruntov* [Soil Mechanics]. 4th edition, newly revised and enlarged. Moscow, Gosstroyizdat Publ., 1963, 636 p. (In Russian)

3. Kushner S.G. *Raschet deformatsiy osnovaniy zdaniy i sooruzheniy* [Calculation of Deformations of Foundations of Buildings and Structures]. Zaporozh'e, IPO Zaporozh'e Publ., 2008, 496 p. (In Russian)

4. Ivanov P.L. *Grunty i osnovaniya gidrotekhnicheskikh sooruzheniy* [Soils and Foundations of Hydraulic Structures]. Moscow, Vysshaya Shkola Publ., 1985, 352 p. (In Russian)

5. Florin V.A. *Osnovy mekhaniki gruntov* [Basics of Soil Mechanics]. Saint Petersburg, Moscow, Gosstroyizdat Publ., 1959, vol. 1 : Obshchie zavisimosti i napryazhennoe sostoyanie osnovaniy sooruzheniy [Common Dependencies and a Stressed State of Foundations of Structures], 1959, 357 p. (In Russian)

6. Parton V.Z., Perlin P.I. *Metody matematicheskoy teorii uprugosti* [Methods of Mathematical Theory of Elasticity]. Moscow, Nauka Publ., 1981, 688 p. (In Russian)

7. Grigolyuk E.I. editor. *Teoriya uprugosti. Osnovy lineynoy teorii i ee primeneniya* [Theory of Elasticity. Basics of Linear Theory and its Application]. Moscow, Mir Publ., 1988, 344 p. (In Russian)

8. Murnaghan F.D. *Finite Deformation of Elastic Solid.* New York, Wiley, 1951, 140 p.

9. Green A.E., Zerna W. *Theoretical Elasticity.* Oxford, Clarendon Press, 1968, 457 p.

10. Poulos H.G., Davis E.H. *Elastic Solutions for Soil and Rock Mechanics.* New York, Wiley, 1974, 411 p.

11. Kolosov G.V. *Primenenie kompleksnykh diagramm i teorii funktsiy kompleksnoy peremennoy k teorii uprugosti* [Complex Diagrams and the Complex Variable Function Theory as Applied to the Theory of Elasticity]. Moscow, Saint Petersburg, Glav. red. obshchetekhn. distsiplin Publ., 1935, 224 p. (In Russian)

12. Muskhelishvili N.I. *Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoy teorii uprugosti: Osnovnye uravneniya. Ploskaya teoriya uprugosti. Kruchenie i izgib* [Certain Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity : Basic Equations. Plane Theory of Elasticity. Torsion and Bending]. 5th edition, revised and enlarged. Moscow, Nauka Publ., 1966, 707 p. (In Russian)

13. Stevenson A.C. Complex Potential in Two-Dimensional Elasticity. *Proc. Roy. Soc. Ser. A.* 1945, vol. 184, no. 997, pp. 129–179, 218–229.

14. Savin G.N. *Raspredelenie napryazheniy okolo otverstiy* [Distribution of Stresses Around Orifices]. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1968, 887 p. (In Russian)

15. Kalandiya A.I. *Matematicheskie metody dvumernoy uprugosti* [Mathematical Methods of Two-Dimensional Elasticity]. Moscow, Nauka Publ., 1973, 303 p. (In Russian)

16. Kosmodamianskiy A.S. *Ploskaya zadacha teorii uprugosti dlya plastin s otverstiyami, vyrezami i vystupami* [Plane Elastic Problem for Plates with Orifices, Cuts and Shoulders]. Kiev, Vishcha shkola, 1975, 227 p. (In Russian)
17. Lu Jian-ke. *Complex Variable Methods in Plane Elasticity*. World Scientific, 1995, 237 p.
18. Akinola A. On Complex Variable Method in Finite Elasticity. *Applied Math.* 2009, no. 1, pp. 1–16. Available at: http://file.scirp.org/pdf/AM20090100001_10535691.pdf.
19. Chau K.T. *Analytical Methods in Geomechanics*. CRC Press, 2012, 424 p.
20. Ter-Martirosyan Z.G. *Mekhanika gruntov* [Soil Mechanics]. Moscow, ASV Publ., 2009, 551 p. (Biblioteka nauchnykh razrabotok i projektov MGSU [Library of Scientific Developments and Projects of MGSU]). (In Russian)
21. Bogomolov A.N., Ushakov A.N. *Metody teorii funktsiy kompleksnogo peremennogo v zadachakh geomekhaniki* [Methods of the Complex Variable Function Theory in Problems of Geomechanics]. Volgograd, Peremena Publ., 2014, 226 p. (In Russian)
22. Verruijt A. Stress Due to Gravity in a Notched Elastic Half-Plane. *Eng. Arch.* 1969, vol. 38, no. 2, pp. 107–118.
23. Bogomolov A.N., Ushakov A.N. Zadacha o vychislenii osadok lentochnogo fundamenta [Problem of calculation of strip foundation settlements]. *Osnovaniya, fundamenty i mekhanika gruntov* [Soil Mechanics and Foundation Engineering]. 2011, no. 6, pp. 2–7. (In Russian)

Received in October, 2016.

About the authors: **Bogomolov Aleksandr Nikolaevich** — Head of Department of Hydraulic and Earthwork Structures, Deputy Director for Science, **Institute of Architecture and Civil Engineering of Volgograd State Technical University (IACE VSTU)**, 1 Akademicheskaya str., Volgograd, 400074, Russian Federation; banzaritcyn@mail.ru;

Ushakov Andrey Nikolaevich — Professor, Department of Mathematics and Information Technology, **Institute of Architecture and Civil Engineering of Volgograd State Technical University (IACE VSTU)**, 1 Akademicheskaya str., Volgograd, 400074, Russian Federation; ushakov.andrej2012@yandex.ru.

For citation: Bogomolov A.N., Ushakov A.N. Napryazhenno-deformirovannoe sostoyanie uprugoy poluploskosti pri lineynom smeshchenii uchastka ee granitsy [Stress-Strain State of an Elastic Half-Plane at a Linear Shift of a Part of its Boundary]. *Vestnik MGSU* [Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering]. 2017, vol. 12, issue 2 (101), pp. 184–192. (In Russian) DOI: 10.22227/1997-0935.2017.2.184-192