ПРИМЕНЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ФОККЕРА–ПЛАНКА ПРИ ИЗУЧЕНИИ ФИНАНСОВЫХ РЫНКОВ

В.Г. Пирожков, О.О. Рошка*, Т.С. Алероев*

*Российский государственный университет нефти и газа (национальный исследовательский университет) им. И.М. Губкина (РГУ нефти и газа (НИУ) имени И.М. Губкина),
119991, г. Москва, Ленинский пр-т, д. 65, корп. 1;*

**Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ), 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26*

АННОТАЦИЯ. В данной работе исследуются валютные котировки пары «российский рубль/доллар США» на предмет фрактальности. Показано, что временной ряд исследуемых котировок обладает основными фрактальными свойствами. С помощью показателя Херста была вычислена размерность Хаусдорфа, которая оказалась дробным числом, что подтверждает гипотезу о фрактальности. Графики волатильности были сравнены с графиками решения известного дробного дифференциального уравнения блуждания точечной частицы по самоподобному фрактальному множеству. Решение такого уравнения выписывается с помощью функций Миттаг-Леффлера. Сравниваются графики этих решений с графиками волатильностей за разные периоды времени. Это также однозначно подтверждает, что российский валютный рынок является фракталом. Таким образом, данные результаты помогут при прогнозировании поведения рынка наперед на заданный интервал времени в будущем, что является практически ценным инструментом для работы с российским валютным рынком.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: финансовые рынки, валютные котировки, дробная размерность, фрактальные временные ряды, функция плотности вероятности распределения, устойчивое распределение, краевые задачи, дробное дифференциальное уравнение

ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ: Пирожков В.Г., Рошка О.О., Алероев Т.С. Применение уравнения Фоккера–Планка при изучении финансовых рынков // Вестник МГСУ. 2017. Т. 12. Вып. 7 (106). С. 809–821. DOI: 10.22227/1997-0935.2017.7.809-821

APPLICATION OF THE FOKKER–PLANCK EQUATION IN THE FINANCIAL MARKETS INVESTIGATION

V.G. Pirozhkov, O.O. Roshka*, T.S. Aleroev*

*Gubkin Russian State University of Oil and Gas (National Research University) (Gubkin University),
65 Leninsky prospect, b. 1, Moscow, 119991, Russian Federation;*

**Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (MGSU),
26 Yaroslavskoe shosse, Moscow, 129337, Russian Federation*

ABSTRACT. In this paper, we study the foreign exchange rates of a pair Russian ruble/US dollar on the subject of fractality. It has been shown that the time series studied quotes has the basic fractal properties. With the help of the Hurst exponent was calculated by the Hausdorff dimension, which was a fractional number that supports the hypothesis of fractality. Volatility charts were compared with charts of known solutions of the fractional differential equation wandering point particle in a self-similar fractal set. The solution of this equation is a function of Mittag-Leffler. It is shown that graphs of the Mittag-Leffler function repeat exactly the structure of graphs volatilities for different periods of time. The solution of such an equation is written out using the Mittag-Leffler functions. The graphs of these decisions are compared with the volatility charts for different time periods. It also clearly confirms that the Russian currency market is a fractal. Thus, these results will help in predicting market behavior in advance a preset time in the future, which is almost a valuable tool for working with Russian currency market.

KEY WORDS: financial markets, currency quotes, fractional dimension, a fractal time series, the probability density function of the distribution, stable distribution, boundary value problems, fractional differential equation

FOR CITATION: Pirozhkov V.G., Roshka O.O., Aleroev T.S. Primeneniye uravneniya Fokkera–Planka pri izuchenii finansovykh rynkov [Application of the Fokker–Planck equation in the financial markets investigation]. Vestnik MGSU [Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering]. 2017, vol. 12, issue 7 (106), pp. 809–821. DOI: 10.22227/1997-0935.2017.7.809-821

Поведение цен на рынке напоминает броуновское движение случайной частицы. На сегодняшний день известно большое количество различных математических моделей для описания поведения рынка. Безусловно, у каждой из них есть свои достоинства, однако объединяет их всех, пожалуй,

то, что ни одна из них не может в точности описать сложнейшую динамику некоторых финансовых временных рядов, которые имеют различные аномальные выбросы. Эти выбросы соответствуют различным событиям, таким как экономический кризис, сезонные колебания, крахи, взлеты и т.д. [1].

Порой поведение рынков никак не вписывается в картину броуновского движения, которое хоть и является в некотором смысле беспорядочным, но все-таки более-менее «спокойно». Картинка финансовых рынков скорее больше похожа на так называемый процесс Леви, где феноменальные скачки объясняются особыми свойствами самого процесса. Известно, что в нефизических системах довольно часто встречаются автомодельные процессы с фрактальной размерностью. Это так называемые полеты Леви. Они обладают бесконечной дисперсией, а их приращения распределены по α -устойчивым законам с индексом устойчивости $0 < \alpha < 2$ (распределения Леви). Моменты приращений такого процесса являются конечными, но сам процесс не является гауссовским [2].

Так называемые устойчивые распределения являются важным типом распределений, которые являются форминвариантными относительно операции свертки. Эти распределения можно интерпретировать как предельные распределения сумм независимых одинаково распределенных случайных величин. Они включают в себя класс распределений с толстыми хвостами и несимметричными плотностями распределения. За исключением некоторых исключений не существует аналитического представления устойчивых распределений, и, как правило, они определяются своими характеристическими функциями, которые обычно зависят от четырех параметров: α — параметр устойчивости, определяет форму распределения (изменяется от нуля до двойки), β — параметр асимметрии (изменяется от минус единицы до единицы), σ — параметр масштабирования (играет роль дисперсии, изменяется от нуля до бесконечности), x — значение пространственной координаты, которое соответствует нахождению «пики» распределения [3].

Для того чтобы начать исследование по части фрактальности российского валютного рынка, нужно четко определить, какие именно свойства мы ищем. Итак, признаки фрактальности таковы:

- у множества есть детали неограниченно маленького размера;
- множество слишком нерегулярное, чтобы описываться обычной геометрией;
- множество самоподобно в каком-нибудь смысле;
- размерность Хаусдорфа больше топологической размерности;

Итак, *фрактал* — это объект, обладающий свойством самоподобия, нерегулярности и дробной размерности [4]. Самоподобие означает, что у рассматриваемого объекта нет характерного масштаба. Все фракталы, которые обладают хотя бы какой-нибудь симметрией, являются самоподобными. В свою очередь, это значит, что многие их структурные фрагменты в целом строго повторяются через определенные промежутки в пространстве. Эти объекты имеют самую разную природу, и их вид и форма остаются неизменными независимо от масштаба, на котором они рассматриваются.

Применительно к рынкам [5–8] самоподобие означает то, что формирование одних и тех же характерных образований должно происходить в различных интервалах во времени. Одноминутный график должен описывать фрактальную структуру так же, как и месячный, а месячный, в свою очередь, — как годовой и т.д. Такой поверхностный анализ может провести даже неспециалист в области фракталов, для этого достаточно лишь достать данные за разные периоды (за день, за неделю, месяц и т.д.) и построить графики на соответствующих временных интервалах. Результат вас поразит: вы увидите вполне идентичные структуры (если не одинаковые).

Рассмотрим более подробно пример самоподобия на всем понятном валютном рынке. Первое свойство — масштабируемость.

Глядя на эти графики, легко заметить, что они подобны, хоть и имеют различный временной масштаб: на рис. 1 представлен масштаб по минутам, на рис. 2 — масштаб цен по неделям.

Рис. 1. Масштаб цен по минутам (доллар/йена)

Рис. 2. Масштаб цен по неделям (евро/доллар)

Обратим внимание, что на рассматриваемых графиках изображены валютные пары с различными масштабами цен. Если мы возьмем любые другие пары валют и сделаем то же самое, что и выше, мы получим абсолютно аналогичные ломаные кривые, т.е. структура по сути не зависит от названия валюты, ее происхождения, механизмы изменений едины для всех валют в целом.

Следующим свойством фракталов является их нерегулярность. Фракталы описываются нерегулярными функциями. Из курса математического анализа известно, что такая функция является нигде не

дифференцируемой, а график не гладкий ни в какой точке (пилообразный). Как мы видим, к рынку это имеет самое прямое отношение. Отсюда очевидно, что колебания цен крайне волатильны и изменчивы, из-за чего у большинства сложилось мнение о полном хаосе на рынках.

Фракталы имеют дробную метрическую размерность. Дробная размерность является показателем сложности кривой. На валютном рынке размерностью можно охарактеризовать волатильность котировок цены (рис. 3, 4).

Рис. 3. Волатильность цен по минутам (доллар/йена)

Рис. 4. Волатильность цен по неделям (евро/доллар)

Итак, для проведения дальнейшего анализа используются цены закрытия индексов. Эти данные находятся в свободном доступе в Интернете. Для того, чтобы выразить дробную размерность всякого фрактала, нужно подсчитать такой показатель как экспонента Херста (или проще, показатель Херста). Показатель Херста тесно связан с размерностью Хаусдорфа (выражается непосредственно) соотношением

$$D = 2 - H,$$

где D — размерность Хаусдорфа; H — показатель Херста.

В свое время Альберт Эйнштейн выявил, что расстояние, преодолеваемое случайной частицей, увеличивается прямо пропорционально квадратному корню из времени, за которое это расстояние преодолевается. Для показателя Херста это был ежегодный слив реки Нил, тогда для рынков это могут быть ежедневные, ежечасные, ежеминутные изменения цены индекса курса акций. Среднее значение x_m временного ряда x определяется как

$$x_m = (x_1 + \dots + x_n)/n.$$

Для расчета показателя Херста существует множество методик. Реализовать алгоритм вы-

числения этой величины на компьютере совсем не трудно. Показатель Херста выражается через размерность Хаусдорфа.

Для начала, чтобы оценить показатель Херста, нами были проанализированы биржевые котировки индекса ММВБ «Нефть и газ» на временном интервале с 11.01.2005 до 05.12.2014 с шагом в день. График изменений цен закрытия, представленный на рис. 5, имеет сильную «изрезанность», т.е. мы можем предположить, что данный временной ряд является фракталом. Брались цены закрытия торгов, и для них был подсчитан показатель Херста $H = 1,0215$.

Как видим, $0,5 < H < 1,5$. Случай $0,5 < H < 1,5$ — самый интересный. Как известно, показатель Херста, оказавшись в одном из трех интервалов (розового, коричневого и черного шума, белый шум не рассматриваем), может сразу охарактеризовать исследуемый процесс. В нашем случае показатель Херста как раз соответствует процессам черного шума, шума с дробной размерностью. Такие шумы и наблюдаются на финансовых рынках.

Рассмотрим котировки пары «рубль/доллар США» за период с 1999 г. по начало 2015 г. График временного ряда за данный период представлен на рис. 6.

Рис. 5. График изменений котировок индекса ММВБ «Нефть и газ» с 11.01.2005 до 05.12.2014

Рис. 6. Временной ряд пары «рубль/доллар США»

Данный ряд проверялся на фрактальность с помощью R/S-анализа, вычисления показателя Херста H , который является своеобразным «идентификатором» фрактальности рассматриваемой структуры. Показатель Херста связан с размерностью Хаусдорфа–Безиковича D соотношением

$$D = 2 - H.$$

Для данного ряда показатель Херста оказался равным 1,0212, и размерность Хаусдорфа равна 0,9788. Как видно, размерность получилась дробной, что, собственно, и позволяет нам назвать рассматриваемый ценовой ряд фракталом.

Итак, фрактальный анализ временных рядов учитывает поведение системы исходя из его предистории. Фрактальная размерность является показателем сложности процесса по величине, которой можно предсказывать поведение системы, и диагностировать нестабильные состояния.

Фрактальные временные ряды являются целым классом фрактальных кривых. Фрактальные кривые являются одним из важных классов самоподобных и самоафинных множеств. Наиболее распространенные примеры фрактальных кривых — это кривая Коха, кривая Пеано, кривая Леви. Широкий класс непрерывных кривых порождается системами сжатий $\{S_1, S_2, \dots, S_n\}$, которые удовлетворяют следующему условию: существует набор точек $(x_0, x_1, \dots, x_n)$, такой, что

$$\{S_i(x_0), S_i(x_1), \dots, S_i(x_n)\} = \{x_{i-1}, x_i\}$$

для всех $i = \overline{1, n}$ (1).

Следует отметить, что этому свойству удовлетворяет любое инвариантное множество системы сжатий, являющееся жордановой кривой (т.е. непрерывной кривой без самопересечений), например кривая Коха. Фрактальные кривые широко используются при описании и моделировании разнообразнейших явлений в различных областях знаний. С помощью такого подхода описываются самые сложные и не имеющие, на первый взгляд, ничего общего с фракталами процессы, такие как движение броуновской частицы или поведение курса обмена валюты на финансовых рынках.

Мы исследовали дневные цены открытия котировок «рубль/доллар США» в течение всего 2016 г. (январь–декабрь). Проводилась аппроксимация различными законами распределения. Как видно из графиков на рис. 7–9, устойчивое распределение Леви дает наиболее подходящий результат:

Parameter Estimate Std. Err.
alpha 1.26284 NaN
beta 1 NaN
gam 1.82265 NaN
delta 64.5283 NaN

Известно, что закон Гаусса является частным случаем закона Леви. Сравним, насколько хорошо

распределение Гаусса аппроксимирует исследуемые котировки:

Distribution: Normal
Log likelihood: -750.977
Domain: $-\text{Inf} < y < \text{Inf}$
Mean: 66.8335
Variance: 25.0888

Parameter Estimate Std. Err.
mu 66.8335 0.318064
sigma 5.00887 0.225588

Estimated covariance of parameter estimates:
mu sigma
mu 0.101164 4.1126e-16
sigma 4.1126e-16 0.05089

Сравним, насколько хорошо логнормальное распределение аппроксимирует исследуемые котировки:

Distribution: Lognormal
Log likelihood: -738.53
Domain: $-\text{Inf} < y < \text{Inf}$
Mean: 66.8287
Variance: 22.8671

Parameter Estimate Std. Err.
mu 4.19958 0.00453797
sigma 0.0714641 0.00321858

Estimated covariance of parameter estimates:
mu sigma
mu 2.05932e-05 -2.09598e-19
sigma -2.09598e-19 1.03593e-05

На рис. 10 изображена гистограмма исследуемой статистики.

Также известно, что если параметр α закона Леви равен двойке (или очень близок), то получится гауссово распределение [3]. Однако выше вычисленный параметр в Matlab имеет значение 1,3, что подтверждает предположение о распределении котировок по устойчивому закону. Посмотрим, как ведут себя графики функций распределений Cumulative Probability (доверительный интервал — точечная синяя линия) (рис. 11–13).

Итак, проанализируем котировки «рубль/доллар» за последние 16 лет (с 2000 по 2016 г.).

Подсчитаем показатель Херста H и фрактальную размерность $D = 2 - H$: они оказались равны 0,9342 (погрешность 0,1547) и 1,0658 (погрешность 0,1547) соответственно.

Анализ временного ряда на Matlab с помощью инструмента Disturbtion Fitting Tool (рис. 14) показывает, что функция плотности вероятности распределения Леви (устойчивого распределения) наилучшим образом аппроксимирует временной ряд котировок.

Рис. 7. Гистограмма статистики и график (плавная линия) закона Леви

Рис. 8. Результат работы функции Evaluate MATLAB R2016b
(интервал 55 : 1 : 85, интервал изменения котировок был 60 : 84)

Рис. 9. График вероятностей, полученных с помощью функции Evaluate

Рис. 10. Гистограмма исследуемой статистики: синяя линия — логнормальное распределение, красная линия — Леви, коричневая линия — гауссово

Рис. 11. Графики функций распределений (модуль Cumulative Probability): синяя линия — логнормальное распределение, красная линия — Леви, коричневая линия — гауссово

Рис. 12. Графики распределений Probability: синяя линия — логнормальное распределение, красная линия — Леви, коричневая линия — гауссово

Выбрав распределение Леви в качестве наилучшего распределения, аппроксимирующего данный ряд, проанализируем его параметры.

Инструмент Distribution Fitting Tool также позволяет вычислять эти параметры. Для нашего ряда были получены значения, показанные на рис. 15.

Рис. 13. Квантили исследуемых распределений (результат работы модуля Quantile): синяя линия — логнормальное распределение, красная линия — Леви, коричневая линия — гауссово

Рис. 14. Анализ временного ряда: синяя линия — распределение Гаусса; оранжевая линия — логнормальное распределение; красная линия — распределение Леви; коричневая линия — обратное распределение Гаусса; розовая линия — экспоненциальное распределение

Results:

Distribution:	Stable
Log likelihood:	-13320.4
Domain:	$-\text{Inf} < y < \text{Inf}$
Mean:	78.713
Variance:	NaN

Parameter	Estimate	Std. Err.
alpha	1.0136	0.0306041
beta	0.542563	0.0230303
gam	1.94746	0.0407315
delta	29.2577	0.0466837

Estimated covariance of parameter estimates:

	alpha	beta	gam	delta
alpha	0.000936611	3.99947e-05	0.00021121	0.000350792
beta	3.99947e-05	0.000530397	-1.30228e-05	-0.000177936
gam	0.00021121	-1.30228e-05	0.00165906	0.000801471
delta	0.000350792	-0.000177936	0.000801471	0.00217937

Рис. 15. Значения параметров для устойчивого распределения Леви

Теперь проанализируем ряд логарифмических доходностей, вычисляемых по формуле

$$D = \ln \left(\frac{P_{i+1}}{P_i} \right).$$

На рис. 16 представлены графики, а также гистограмма логарифмических доходностей.

На рис. 17. представлен скриншот результатов расчетов параметров для устойчивого распределения Леви.

Отметим также, что распределение волатильности за заданный период с 2000 по 2016 гг. также распределена по закону Леви. Таким образом, мы получаем, что распределение валютных котировок распределено по устойчивому закону Леви.

Как известно, так называемая характеристическая функция устойчивого распределения, которая входит в выражение образа Фурье дробной производной Ритца–Феллера [3]. Как следствие, устойчивые распределения можно интерпретировать как фундаментальное решение дробного дифференциального уравнения диффузии вида

$$\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^\beta u(x,t)}{\partial x^\beta}.$$

Для этого уравнения поставим следующую задачу с естественными краевыми и начальными условиями

$$\begin{cases} \frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^\beta u(x,t)}{\partial x^\beta}, \end{cases} \quad (1)$$

$$u(0,t) = u(1,t), \quad (2)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} D_{0+}^{\alpha-1} u(x,t) = \varphi(x), \quad (3)$$

где

$$\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t u(x,\tau) d\tau,$$

$$\frac{\partial^\beta u(x,t)}{\partial x^\beta} = \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^x u(\tau,t) d\tau,$$

— дробные производные (в смысле Римана–Лиувилля) порядков $0 < \alpha < 1$ и $0 < \beta < 1$ соответственно.

Рис. 16. Графики исследуемых распределений: красная линия — распределений — устойчивое; синяя линия — Гаусса

Results:			
Distribution:	Stable		
Log likelihood:	16518.1		
Domain:	-Inf < y < Inf		
Mean:	NaN		
Variance:	NaN		
Parameter	Estimate	Std. Err.	
alpha	0.987797	0.0175838	
beta	0.0533103	0.0276394	
gam	0.00185622	3.9571e-05	
delta	-4.68717e-05	3.98948e-05	
Estimated covariance of parameter estimates:			
	alpha	beta	gam
alpha	0.000309191	2.59786e-06	1.40076e-07
beta	2.59786e-06	0.000763938	-3.73668e-09
gam	1.40076e-07	-3.73668e-09	1.56586e-09
delta	1.68631e-08	-2.28682e-07	6.77575e-11

Рис. 17. Расчеты параметров для устойчивого распределения Леви

Для данной задачи (1)–(3) имеет место следующая теорема [4] (ее можно применить для изучения финансовых рынков в случае, когда $u(x, t)$ — логарифмическая доходность цен).

Теорема. Функция

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n E_{\alpha}(\lambda_n t^{\alpha}) x^{\beta-1} E_{\beta, \beta}(\lambda_n x^{\beta}) \quad (4)$$

является решением краевой задачи (1)–(3). Здесь

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\beta + \alpha k)}$$

— известная функция типа Миттаг-Леффлера.

Решим задачу (1)–(3) в случае, когда $u(0, t) = u(2, t)$ и

$$u(x, 0) = f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{4-2x}{3}, & \frac{1}{2} \leq x \leq 2 \end{cases}.$$

Рис. 17–20 иллюстрируют задачу для выражений (1)–(4).

Полученные в ходе исследования валютных котировок результаты помогут при прогнозировании поведения рынка наперед заданный интервал времени в будущем, что является практически ценным инструментом для работы с российским валютным рынком.

Рис. 17. Случай (1) ($t = 0,4$, $\alpha = 0,5$, $0 \leq x \leq 2$, $1 \leq \beta \leq 2$)

Рис. 18. Случай (2) ($t = 0,4$, $\beta = 1,5$, $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq \alpha \leq 1$)

Рис. 19. Случай (3) ($x = 1,5$, $\alpha = 0,5$, $0 \leq t \leq 1$, $1 \leq \beta \leq 2$) Рис. 20. Случай (4) ($x = 1,5$, $\beta = 1,5$, $0 \leq t \leq 1$, $0 \leq \alpha \leq 1$)

ЛИТЕРАТУРА

1. Алмазов А.А. Фрактальная теория. Как поменять взгляд на рынки. М. : Admiral Markets, 2009, 209 с.
2. Виноградов Д.В. Куммулянтное описание усеченного произвольным образом полета Леви // Радиофизика и радиоастрономия. 2010. Т. 15. № 3. С. 338–347.
3. Korbel J., Luchko Yu. Modeling of financial processes with a space-time fractional diffusion equation of varying order // Fractional Calculus and Applied Analysis. 2016. Vol. 19. No. 6. Pp. 1414–1433.
4. Aleroev T.S., Aleroeva H.T., Jianfei Huang et al. Boundary value problems of fractional Fokker-Planck equations // Computers & Mathematics with Applications. 2017. Vol. 73. Issue 6. Pp. 959–969. Режим доступа: <http://dx.doi.org/10.1016/j.camwa.2016.06.038>.
5. Антонова И.В., Чикина Н.А. Применение методов фрактального анализа к исследованию временных рядов // Вестник Национального технического университета «Харьковский политехнический институт». Серия : Информатика и моделирование. 2015. № 32. С. 1141.
6. Старченко Н.В. Локальный анализ хаотических временных рядов с помощью индекса фрактальности : автореф. дисс. ... канд. физ.-мат. наук. М., 2005. 23 с.
7. Теплов С.Е. Исследование и разработка модели спекулятивной торговли и применение гипотезы фрактального рынка капиталов : дис. ... канд. экон. наук. М., 2007. 231 с.
8. Теплов С.Е. R/S-анализ американского фондового, российского фондового и валютного рынков // Финансовый сектор в экономике : сб. статей. М. : МФПА, 2007.

9. Федер Е. Фракталы / пер. с англ. Ю.А. Данилова, А. Шукурова. М. : Мир, 1991. 260 с.

10. Афанасьев В.Н., Юзбашев М.М. Анализ временных рядов и прогнозирование. М. : Финансы и статистика, 2001. 226 с.

11. Барабаш Т.К., Масловская А.Г. Компьютерное моделирование фрактальных временных рядов // Вестник Амурского государственного университета. Серия: Естественные и экономические науки. 2010. Вып. 49. С. 31–38.

12. Белов И.Ю. Агентно-ориентированный подход к моделированию пузырей и крахов на виртуальных финансовых рынках : маг. дис. СПб., 2013. 63 с.

13. Божокин С.В., Паршин Д.А. Фракталы и мультифракталы. М. ; Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 128 с.

14. Бутковский М.М. Технический анализ и фрактальные методы в исследовании финансовых рынков // Вестник Бурятского государственного университета. 2011. Вып. 9: Математика, информатика. С. 237–244.

15. Вильямс Б. Новые измерения в биржевой торговле : пер. с англ. Е. Василевская. М. : ИК Аналитика, 2000. 262 с.

16. Вильямс Б. Торговый хаос. М. : ИК Аналитика, 2000. 305 с. (Биржевая литература)

17. Гилюмов И.И. Моделирование экономических агентов при помощи конечных автоматов // Интегрированные модели, мягкие вычисления, вероятностные системы и комплексы программ в искусственном интеллекте : тезисы конф. Т. 2. М. : Физматлит, 2009. С. 72–89.

18. Громов Ю.Ю., Земской А., Иванова Ю.О. и др. Фрактальный анализ и процессы в компьютерных сетях :

2-е изд., стереотип. Тамбов : Изд-во Тамбовск. гос. техн. ун-та, 2007. 108 с.

19. Дубовиков М.М., Крянев А.В., Старченко Н.В. Размерность минимального покрытия и локальный анализ фрактальных временных рядов // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Прикладная и компьютерная математика. 2004. Т. 3. № 1. С. 81–95.

20. Зеленый Л.М., Милованов А.В. Фрактальная топология и странная кинетика: от теории перколяции к проблемам космической электродинамики // Успехи физических наук. 2004. Т. 174. № 8. С. 809–856.

21. Киселев Б.В. О некоторых особенностях интерпретации статистического R/S-анализа // Вопросы геофизики. Вып. 46 / под ред. В.Н. Трояна, Н.И. Успенского, А.К. Сараева. СПб. : Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2013. С. 159–165. (Ученые записки СПбГУ. № 446).

22. Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории / пер. с англ. 2-е изд., доп. М. : Техносфера, 2006. 488 с.

23. Лоскутов А.Ю. Анализ временных рядов. М. : Физич. фак-т МГУ им. М.В. Ломоносова. 2009. 113 с.

24. Любушин А.А. Фрактальный анализ временных рядов. М. : РГГУ им. С. Орджоникидзе, 2006. 23 с.

25. Мандельброт Б. Фракталы и хаос. Множество Мандельброта и другие чудеса / пер. с англ. Н.А. Зубченко. М. ; Ижевск : Регулярная и хаотичная динамика, 2009. 391 с.

26. Мандельброт Б. Фракталы, случай и финансы : (1959-1997) / пер. с фр. В.В. Шуликовской ; под ред. А.Р. Логунова. М. ; Ижевск : R&C Dynamics, 2004. 255 с.

Поступила в редакцию в марте 2017 г.

Принята в доработанном виде в июле 2017 г.

Одобрена для публикации в июле 2017 г.

Об авторах: **Пирожков Виктор Григорьевич** — кандидат технических наук, доцент, профессор кафедры технической механики, **Российский государственный университет нефти и газа (национальный исследовательский университет) имени И.М. Губкина (РГУ нефти и газа (НИУ) имени И.М. Губкина)**, 119991, г. Москва, Ленинский пр-т, д. 65, корп. 1, pirogov@gubkin.ru;

Рошка Ольга Олеговна — аспирант, ассистент кафедры прикладной математики, **Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ)**, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, roshka_olya@mail.ru;

Алероев Темирхан Султанович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики, **Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ)**, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, aleroev@mail.ru.

REFERENCES

1. Almazov A.A. *Fraktal'naya teoriya. Kak pomenyat' vzglyad na rynki* [Fractal theory. How to Change the View of the Markets]. Moscow, Admiral Markets Publ., 2009, 209 p. (In Russian)

2. Vinogradov D.V. Kummulyantnoe opisanie usechennogo proizvod'nym obrazom poleta Levi [Cumulative Description of the Flight of a Truncated Lévy flight]. *Radiofizika i radioastronomiya* [Radiophysics and Radio Astronomy]. 2010, vol. 15, no. 3, pp. 338–347. (In Russian)

3. Korbel J., Luchko Yu. Modeling of Financial Processes with a Space-Time Fractional Diffusion Equation of Varying Order. *Fractional Calculus and Applied Analysis*. 2016, vol. 19, no. 6, pp. 1414–1433.

4. Aleroev T.S., Aleroeva H.T., Jianfei Huang et al. Boundary value problems of fractional Fokker–Planck equa-

tions. *Computers & Mathematics with Applications*. 2017. Vol. 73. Issue 6. Pp. 959–969. Available at: <http://dx.doi.org/10.1016/j.camwa.2016.06.038>.

5. Antonova I.V., Chikina N.A. Primenenie metodov fraktal'nogo analiza k issledovaniyu vremennykh ryadov [Application of Fractal Analysis Methods of to the Study of Time Series]. *Vestnik Natsional'nogo tekhnicheskogo universiteta «KHPI»*. *Seriya: Informatika i modelirovanie* [Vestnik of the National Technical University “Kharkiv Polytechnical Institute”. Series: Computer Science and Modeling]. 2015, no. 32, p. 1141. (In Russian)

6. Starchenko N.V. *Lokal'nyy analiz khaoticheskikh vremennykh ryadov s pomoshch'yu indeksa fraktal'nosti : avtoreferat dissertatsii ... kandidata fiziko-matematicheskikh nauk* [Local Analysis of Chaotic Time Series with the Help of the

Fractality Index: Abstract of the Thesis of candidate of Physical and Mathematical Sciences]. Moscow, 2005, 23 p. (In Russian)

7. Teplov S.E. *Issledovanie i razrabotka modeli spekulativnoy trgovli i primeneniye gipotezy fraktal'nogo rynka kapitalov : dissertatsii ... kandidata ekonomicheskikh nauk* [Research and Development of a Model of Speculative Trade and Application of the Hypothesis of a Fractal Capital Market : Thesis of Candidate of Economical Sciences]. Moscow, 2007, 231 p. (In Russian)

8. Teplov S.E. R/S-analiz Amerikanskogo Fondovogo, Rossiyskogo Fondovogo i Valyutnogo Rynkov [R/S-Analysis of the American Stock, the Russian Stock and Currency Markets]. *Finansovyy sektor v ekonomike : sbornik statey* [Financial Sector in the Economics]. Moscow, MFPA Publ., 2007. (In Russian)

9. Feder J. *Fractals*. Springer Science + Business Media, LLC, 1988. 305 p. (Physics of Solids and Liquids)

10. Afanas'ev V.N., Yuzbashev M.M. *Analiz vremennykh ryadov i prognozirovaniye* [Time Series Analysis and Forecasting]. Moscow, Finansy i statistika Publ., 2001, 226 p. (In Russian)

11. Barabash T.K., Maslovskaya A.G. Komp'yuternoe modelirovaniye fraktal'nykh vremennykh ryadov [Computer Modeling of Fractal Time Series]. *Vestnik Amurskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Estestvennye i ekonomicheskie nauki* [Bulletin of the Amur State University]. 2010, issue. 49, pp. 31–38. (In Russian)

12. Belov I.Yu. *Agentno-oriyentirovanny podkhod k modelirovaniyu puzyrey i krakhov na virtual'nykh finansovykh rynkakh : masterskaya dissertatsiya* [Agent-oriented Approach To Modeling Bubbles and Crashes in Virtual Financial Markets: Magister Thesis]. St-Petersburg, 2013, 63 p. (In Russian)

13. Bozhokin S.V., Parshin D.A. *Fraktaly i mul'tifraktaly* [Fractals and Multifractals]. Moscow-Izhevsk, NITS «Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika» Publ., 2001, 128 p. (In Russian)

14. Butovskiy M.M. Tekhnicheskii analiz i fraktal'nye metody v issledovanii finansovykh rynkov [Technical Analysis and Fractal Methods in the Study of Financial Markets]. *Vestnik Buryatskogo gosudarstvennogo universiteta* [Bulletin of the Buryat State University]. 2011, iss. 9: Matematika, informatika [Mathematics, Computer Science], pp. 237–244. (In Russian)

15. Williams B.M. *New Trading Dimensions: How to Profit from Chaos in Stocks, Bonds, and Commodities*. John Wiley and Sons, Ltd, 1998, 288 p.

16. Williams J.G., Williams B.M. *Trading Chaos: Maximize Profits with Proven Technical Techniques, 2nd Edition*. John Wiley and Sons, Ltd, 2004, 256 p.

17. Gnilomedov I.I. Modelirovaniye ekonomicheskikh agentov pri pomoshchi konechnykh avtomatov [Modeling of Economic Agents Using Finite State Machines]. *Integrirovannyye modeli, myagkie vychisleniya, veroyatnostnyye sistemy i kompleksy programm v iskusstvennom intellekte : tezisy konferentsii T. 2* [Integrated Models, Soft Calculations, Probabilistic Systems and Software Complexes in Artificial Intelligence: Theses of Conference. Vol. 2]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2009, pp. 72–89. (In Russian)

18. Gromov Yu.Yu., Zemskoy A., Ivanova O.G. et al. *Fraktal'nyy analiz i protsessy v komp'yuternykh setyakh* [Fractal Analysis and Processes in Computer Networks]. 2nd ed. Tambov, Tambov State Technical University Publ., 2007, 108 p. (In Russian)

19. Dubovikov M.M., Kryanev A.V., Starchenko N.V. Razmernost' minimal'nogo pokrytiya i lokal'nyy analiz fraktal'nykh vremennykh ryadov [Dimension of the Minimal Cover and Local Analysis of Fractal Time Series]. *Vestnik Rossiyskogo universiteta druzhby narodov. Seriya: Prikladnaya i komp'yuternaya matematika* [Bulletin of the Peoples' Friendship University of Russia]. 2004, vol. 3, no. 1, pp. 81–95. (In Russian)

20. Zelenyy L.M., Milovanov A.V. Fraktal'naya topologiya i strannaya kinetika: ot teorii perkolyatsii k problemam kosmicheskoy elektrodinamiki [Fractal Topology and Strange Kinetics: From the Theory of Percolation to Problems of Cosmic Electrodynamics]. *Uspekhi fizicheskikh nauk* [Advances in Physical Sciences]. 2004, vol. 174, no. 8, pp. 809–856. (In Russian)

21. Kiselev B. V. O nekotorykh osobennostyakh interpretatsii statisticheskogo R/S-analiza [On Some Features of the Interpretation of Statistical R/S-analysis]. *Voprosy geofiziki* [Questions of Geophysics]. Saint Petersburg, Izdatel'stvo Sankt-Peterburgskogo universiteta Publ., 2013, issue. 46, pp. 159–165. (Uchenye zapiski SPbGU. no. 446 [Scientific notes of St. Petersburg State University, no. 446]). (In Russian)

22. Richard M. Crownover. *Introduction to Fractals and Chaos*. London, Jones and Bartlett, 1995, 306 p.

23. Loskutov A.Yu. *Analiz vremennykh ryadov* [Time Series Analysis]. Moscow, Physical Faculty of the Moscow State University Publ., 2009, 113 p. (In Russian)

24. Lyubushin A.A. Fraktal'nyy analiz vremennykh ryadov [Fractal Analysis of Time Series]. Moscow, Russian State Geological Prospecting University Publ., 2006. 23 p. (In Russian)

25. Mandelbrot B. *Fractals and Chaos : the Mandelbrot Set and Beyond*. New York, Springer Science & Business Media, 2004. 308 p.

26. Mandelbrot B. *Fractales, Hasard et Finance*. Flammarion, 1997, 246 p. (In French)

Received in March 2017.

Adopted in revised form in July 2017.

Approved for publication in July 2017.

About the authors: **Pirozhkov Victor Grigorevich** — Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Professor of the Department of Technical Mechanics, **Gubkin Russian State University of Oil and Gas (National Research University) (Gubkin University)**, 65 Leninsky prospect, b. 1, Moscow, 119991, Russian Federation; pirozhkov@gubkin.ru;

Roshka Olga Olegovna — Postgraduate Student, Assistant of the Department of Applied Mathematics, **Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (MGSU)**, 26 Yaroslavl'skoe shosse, Moscow, 129337, Russian Federation; roshka_olya@mail.ru;

Aleroev Temirkhan Sultanovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of the Applied Mathematics, **Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (MGSU)**, 26 Yaroslavl'skoe shosse, Moscow, 129337, Russian Federation; aleroev@mail.ru.