ПРОЕКТИРОВАНИЕ И КОНСТРУИРОВАНИЕ СТРОИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ. ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ В СТРОИТЕЛЬСТВЕ

УДК 624.016:536.21

DOI: 10.22227/1997-0935.2019.1.12-21

Стационарное температурное поле в многослойных стержнях с разрывами ширины сечения

А.В. Мищенко

*Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет (Сибстрин)
(НГАСУ (Сибстрин)), 630008, г. Новосибирск, ул. Ленинградская, д. 113*

АННОТАЦИЯ

Введение. Представлен способ моделирования двумерного стационарного температурного поля в слоистом стержне. Особенности структуры стержня являются наличие разрывности функции ширины поперечного сечения в направлении теплового потока и многослойность. Выявление температурного поля в таких стержнях — необходимый этап решения задачи термоупругости. Актуальность проблемы заключается в разработке аналитических методов расчета слоистых стержней сложной геометрической формы при тепловом воздействии, обладающих приемлемой вычислительной трудоемкостью и необходимой точностью.

Материалы и методы. Для многослойного стержня рассмотрено приближенное решение задачи стационарной теплопроводности Дирихле при поперечном направлении теплового потока. В пределах каждого слоя функция распределения температуры представлена в виде суммы линейной в направлении теплового потока функции и поправочной нелинейной функции двух переменных. Первая отражает точное решение задачи для слоистого сечения прямоугольной формы. Вторая описывает нелинейные искажения температурного поля, обусловленные наличием разрывов ширины сечения. Поправочная функция, согласно методу Фурье, представлена в виде произведения заданной координатной функции и суммы искоемых амплитуд, вызванных разрывами ширины. Введены функции влияния разрыва ширины на температурные поля в смежных слоях. Сформулирована приближенная постановка задачи Дирихле с интегральными условиями сопряжения на межслойных границах.

Результаты. Выполнен расчет параметров стационарного температурного поля для семислойного сечения тавровой формы с чередованием слоев из углепластика и стали. Тестирование результатов по программе Ansys показало хорошее качественное и количественное соответствие двумерных температурных полей.

Выводы. Полученное решение удовлетворительно описывает температурное поле в сечении слоистого стержня в окрестности его геометрических особенностей. Метод характеризуется приемлемой трудоемкостью и точностью, пригодной для решения задачи термоупругости слоистого стержня.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: слоистый стержень, многослойность, структурная неоднородность, стационарная теплопроводность, задача Дирихле, тепловой поток, термоупругость

Благодарности. Автор благодарит С.А. Калинкина — магистранта Сибирского государственного университета путей сообщения (г. Новосибирск) за выполнение численных расчетов в Ansys; РФФИ за финансовую поддержку в рамках проекта 19-01-00038\19.

ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ: Мищенко А.В. Стационарное температурное поле в многослойных стержнях с разрывами ширины сечения // Вестник МГСУ. 2019. Т. 14. Вып. 1. С. 12–21. DOI 10.22227/1997-0935.2019.1.12-21

Stationary temperature field in multi-layered rods with discontinuous of cross section width

Andrey V. Mishchenko

*Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering (Sibstrin) (NSUACE (Sibstrin)),
113 Leninskaya st., Novosibirsk, 630008, Russian Federation*

ABSTRACT

Introduction. Presents a method for modeling a two-dimensional stationary temperature field in a layered rod. The peculiarity of the structure of the rod is the presence of discontinuity of the width of the cross section in the direction of heat flow and multilayer. Identification of the temperature field in such rods is a necessary step in solving the problem of thermoelasticity. The relevance of the problem lies in the development of analytical methods for analysis layered rods of complex geometric shape with thermal effects, with acceptable computational complexity and necessary accuracy.

Materials and methods. For a multilayer rod, a method for constructing an approximate solution of the Dirichlet stationary heat conduction problem with a transverse heat flow direction is considered. Within each layer, the temperature distribution function is represented as a sum of two functions. The first function, linear in the direction of the heat flow, reflects the exact solution of the problem for a rectangular layered section. The second function is the correction nonlinear function of two variables. It describes the nonlinear distortions of the temperature field due to the presence of discontinuities in the width of

the cross section. The correction function, according to the Fourier method, is represented as a product of a given coordinate function and the sum of the sought amplitudes caused by the width breaks. The functions of the effect of breaking the width on temperature fields in adjacent layers are introduced. An approximate formulation of the Dirichlet problem with integral conjugation conditions on interlayer boundaries is formulated.

Results. The parameters of the stationary temperature field were calculated for a seven-layer section of a T-shaped form with alternating layers of carbon and steel. Testing the results of the Ansys program showed good qualitative and quantitative correspondence of two-dimensional temperature fields.

Conclusions. The obtained solution satisfactorily describes the temperature field in the cross section of a layered rod in the vicinity of its geometric features. The method is characterized by acceptable laboriousness and accuracy suitable for solving the problem of thermoelasticity of a layered rod.

KEYWORDS: layered rod, multilayer, structural inhomogeneity, stationary thermal conductivity, Dirichlet problem, heat flow, thermoelasticity

Acknowledgements. The author thanks S.A. Kalinkin — undergraduate student of the Siberian State University of Communications (Novosibirsk) for performing numerical calculations at Ansys; RFBR for financial support under the project 19-01-00038/19.

FOR CITATION: Mishchenko A.V. Stationary temperature field in multi-layered rods with discontinuous of cross section width. *Vestnik MGSU* [Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering]. 2019; 14:1:12-21. DOI: 10.22227/1997-0935.2019.1.12-21 (rus.).

ВВЕДЕНИЕ

В конструкциях зданий и сооружений одним из важнейших и имеющих широкое практическое распространение является тепловое воздействие, обусловленное: а) наличием перепадов температур между отдельными объемами здания и внешней воздушной, грунтовой и жидкой средами; б) различными технологическими процессами внутри здания, приводящими к изменению температуры; в) аварийными ситуациями. Расчеты параметров возникающих температурных полей составляют суть первого этапа при решении несвязанной задачи термоупругости [1, 2].

Структурная неоднородность конструкций, позволяющая создавать эффективные по прочности, жесткости, устойчивости и ряду других показателей системы [1–11], — фактор, значительно усложняющий расчеты внутренних температурных полей при тепловых воздействиях [5, 7, 8, 12–19]. В данном исследовании обратимся к стержневым элементам. Направления тепловых потоков, возникающих в них при задании определенных граничных условий, могут быть весьма разнообразными. Наиболее распространенным в инженерной практике случаем является однородное температурное поле или неоднородное при продольном направлении теплового потока. Постановка и методы решения, возникающих в таких случаях задач для однородных и неоднородных стержней различной геометрии, рассмотрены в работах [12–15]. Вместе с тем интерес представляют и другие начально-краевые задачи теплопроводности, в которых параметры внешнего теплового поля задаются на части боковых поверхностей тонких стержней, что приводит к возникновению внутренних тепловых потоков

поперечного направления [1, 16–18, 21, 22]. В простых случаях слоистой структуры распределение температуры в этом направлении получается полилинейным [1, 21], например, в слоистых пластинах и поперечно-слоистых стержнях прямоугольного сечения (рис. 1, а). В слоистых и однородных стержнях, а также других телах сложной структуры, характеризующейся изменением геометрических или структурных параметров в направлении теплового потока, распределение температуры существенно усложняется, становясь нелинейным [16–18, 22]. Для практически важных случаев разрывности геометрических параметров, характерных для поперечных сечений тавровой, двутавровой, коробча-

Рис. 1. а, с, d — поперечные сечения стержней; b — полилинейное распределение температуры

Fig. 1. а, с, d — rod cross-sections; b — multilinear temperature distribution

той (рис. 1, *c*, *d*) и т.п. форм, точные аналитические решения отсутствуют. В подобных случаях решение задачи теплопроводности может быть построено на основе численных, вариационных и других способов [16, 19, 22–25]. В работе [20] с использованием асимптотического метода построено приближенное аналитическое решение задачи о нестационарной теплопроводности слоисто-неоднородного стержня произвольной структуры при задании граничных условий общего вида.

Вариант построения приближенного решения краевой задачи стационарной теплопроводности при поперечном направлении теплового потока для слоистых стержней с разрывами ширины описан в статье [22]. В нем на основе метода Власова — Канторовича использована однотипная аппроксимация температурных полей во всех слоях. Продолжая данное направление исследований, рассмотрим другой подход, основанный на анализе влияния локальных разрывов геометрических функций на распределение внутренней температуры в многослойных стержнях. Для таких стержней способ характеризуется меньшей трудоемкостью, пригодной для использования в задачах термоупругости неоднородных стержневых систем.

ПОСТАНОВКА И МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Стержень представлен кусочно-однородной поперечно-слоистой средой (рис. 1, *d*). В нем имеется s слоев, выполненных из различных однородных материалов с коэффициентами теплопроводности λ_k ($k = 1, \dots, s$). Ось x системы координат x, y, z имеет продольное направление, а структура в целом обладает свойствами симметрии относительно плоскости x, y с произвольной привязкой к плоскости $y = 0$. Слои отделены друг от друга цилиндрическими поверхностями $y_k(x)$ ($k = 1, \dots, s+1$), пронумерованными снизу вверх, с образующими параллельными оси z . k -й слой заключен между k -й (нижней) и $k+1$ -й (верхней) границами. Направлением реализации неоднородности структуры является поперечная ось y . В нормальном к оси x сечении стержня слои имеют прямоугольную форму с размерами $2b_k$, $h_k = y_{k+1} - y_k$. Спецификой структуры стержня является: а) наличие большого числа слоев s ; б) разрывность функции ширины сечения $b(y)$ на некоторых межслойных границах. Разрыв функции в уровне k -й границы обозначим через $\Delta b_k = b_{k,\max} - b_{k,\min}$, где $b_{k,\max} = \max(b_{k-1}, b_k)$ — максимальное, а $b_{k,\min} = \min(b_{k-1}, b_k)$ — минимальное значение ширины смежных слоев. В результате на межслойной границе $y = y_k$ образуется два участка: общий участок границы $z \in [0; b_{k,\min}]$ и участок разрыва контакта $z \in [b_{k,\min}; b_{k,\max}]$. Именно локальная разрывность функции ширины является возмущающим фактором, обуславливающим нелинейность

внутреннего поля температур в стержне при тепловом воздействии [22].

Теплообмен осуществляется через верхнюю up и нижнюю dn поверхности, на которых при использовании граничных условий первого рода (Дирихле) заданы изменения температур Δt_{up} , Δt_{dn} , а в случае применения условий второго рода (Неймана) — плотности тепловых потоков q_{up} , q_{dn} соответственно [1, 21]. На остальных поверхностях, включая поверхности, образованные разрывами функции $b(y)$, теплообмен отсутствует.

Полагая продольные градиенты геометрических параметров тонкого стержня ($h \ll l$) и внешнего температурного воздействия малыми, будем рассматривать двумерную задачу стационарной теплопроводности о нахождении функций $t_k(y, z)$ ($k = 1, \dots, s$) в правой полуплоскости yz s -слойного сечения стержня на основе уравнения Лапласа [1, 24, 26]

$$\nabla^2 t_k(y, z) = 0 \quad (k = 1, \dots, s). \quad (1)$$

При построении приближенного решения задачи температурные поля в многослойном сечении аппроксимируем функцией:

$$t_k(y, z) = t_k^{(0)}(y) + \Phi_k(y, z), \quad k = 1, \dots, s; \quad (2)$$

$$t_k^{(0)}(y) = c_{k1} + c_{k2} h^{-1} y, \quad h = y_{s+1} - y_1, \quad (3)$$

где $t_k^{(0)}(y)$ — базовая полилинейная аппроксимация, являющаяся точным решением задачи для поперечно-слоистой структуры без разрывов ширины (рис. 1, *a*, *b*); $\Phi_k(y, z)$ — нелинейная поправочная функция, отражающая влияние разрывов ширины на распределение температуры в k -м слое. При отсутствии межслойных разрывов — $\Phi_k(y, z) \rightarrow 0$.

На рис. 2 показан фрагмент многослойного сечения, содержащий на j -й границе разрыв ширины $b(y)$ (номера слоев очерчены окружностью, а номера межслойных границ — прямоугольным контуром). Введем в рассмотрение геометрические функции влияния разрыва на температурное поле в сечении: верхнюю $g_{j,up}(y)$ и нижнюю $g_{j,dn}(y)$, имеющие соответственно области определения, расположенные выше и ниже j -й границы

$$g_{j,up}(y) = \frac{y_{j+u_j} - y}{y_{j+u_j} - y_j}, \quad g_{j,dn}(y) = \frac{y - y_{j-d_j}}{y_j - y_{j-d_j}}, \quad (4)$$

где u_j , d_j — заданные целочисленные параметры, отражающие глубину (количество слоев) верхней и нижней функции влияния j -го разрыва ширины.

Безразмерные функции (4) $0 \leq (g_{j,up}; g_{j,dn}) \leq 1$ удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} g_{j,up}(y_j) &= g_{j,dn}(y_j) = 1, \\ g_{j,up}(y_{j+u_j}) &= g_{j,dn}(y_{j-d_j}) = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Представим поправочную функцию $\Phi_k(y, z)$ для k -го слоя в виде

Рис. 2. Фрагмент многослойного сечения с разрывом ширины на j -й границе: a — схема сечения; b — функции влияния

Fig. 2. Fragment of a multilayer section with a gap width at the j -th border: a — section diagram; b — influence function

$$\Phi_k(y, z) = A_k(y) f_k(z) = \left[\sum_{j=2}^k \xi_j A_{j,up}(y) + \sum_{j=k+1}^s \xi_j A_{j,dn}(y) \right] f_k(z), \quad (6)$$

где $A_k(y)$ — амплитуда поперечного распределения температуры в k -м слое, заданного базисной функцией $f_k(z)$, удовлетворяющей граничным условиям на концах интервала $z \in [0, b_k]$; $A_{j,up}(y)$, $A_{j,dn}(y)$ — амплитуды верхнего и нижнего влияния разрыва ширины сечения на j -й границе на амплитуду $A_k(y)$ в k -м слое; $\xi_j = 0; 1$ — признак наличия разрыва на j -й границе. Функция $A_{j,up}(y)$ определена при $k \geq j$, а $A_{j,dn}(y)$ — при $k < j$.

Амплитуды представим через геометрические функции влияния (4) в виде разложений

$$A_{j,up}(y) = \sum_{i=1}^{r_{u_j}} p_{ji} \cdot g_{j,up}^i(y),$$

$$A_{j,dn}(y) = \sum_{i=1}^{r_{d_j}} q_{ji} \cdot g_{j,dn}^i(y), \quad (7)$$

где r_{u_j} , r_{d_j} — заданные степени аппроксимирующих полиномов для верхней и нижней поправочных функций j -го разрыва, а p_{ji} , q_{ji} — искомые числовые параметры степенного разложения.

Полагаем, что за пределами своих областей определения $up \rightarrow [y_j, y_{j+u_j}]$, $dn \rightarrow [y_{j-d_j}, y_j]$ функции влияния (4) принимают нулевые значения, что, в силу $\Phi_k(y, z) = 0$, обеспечивает для температурных функций (2) линейность по y и независимость от z .

В качестве базисных функций могут использоваться, например, балочные функции

$$f_k(\bar{z}) = \bar{z}^2(2\bar{z} - 3), \quad 0 \leq \bar{z} \leq 1,$$

$$f_k(z) = \begin{cases} \bar{z}^2(\bar{z} - 3\bar{z}_*) = \varphi, & 0 \leq \bar{z} \leq \bar{z}_*, \\ \varphi + 3(2\bar{z}_* - 1)(\bar{z} - \bar{z}_*), & \bar{z}_* \leq \bar{z} \leq 1, \end{cases} \quad (8)$$

$$\bar{z} = z/b_k, \quad \bar{z}_* = z_*/b_k.$$

При их получении в соответствии с граничными условиями данной задачи использована балка, имеющая жесткое защемление слева ($z = 0$) и угловую связь на правом конце ($z = b_k$). Кроме того, при получении второй из них выполнено введение промежуточного цилиндрического шарнира при $z = z_*$, что позволяет варьировать положение точки перегиба базисной функции, которая, как показывает вычислительный эксперимент, по координате z наблюдается вблизи точки разрыва ширины.

Другим вариантом базисных функций могут являться тригонометрические функции. Исходя из феноменологических соображений о характере распределения температуры в k -м слое в направлении оси z и выполнения требуемых условий, можно принять их в следующем виде

$$f_k(z) = \cos(\pi \bar{z}) - 1. \quad (9)$$

В результате принятия аппроксимаций (2)–(7) искомые температурные функции для s -слойного сечения, имеющего r разрывов ширины, будут содержать параметры c_{k1} , c_{k2} ($k = 1, \dots, s$) базовых функций (3) и параметры p_{ji} ($i = 1, \dots, r_{u_j}$), q_{ji} ($i = 1, \dots, r_{d_j}$, $j = 1, \dots, r$) амплитуд (7) суммарным числом

$$n_p = 2s + \sum_{j=1}^r (r_{u_j} + r_{d_j}). \quad (10)$$

Для их нахождения в рассматриваемой краевой задаче при заданных изменениях температур Δt_{dn} , Δt_{up} имеем: а) граничные условия Дирихле на нижней и верхней поверхностях; б) условия сопряжения температур; в) плотностей тепловых потоков на общих участках межслойных границ; г) условия отсутствия теплообмена на участках разрыва функции ширины; д) условия отсутствия теплообмена на боковых поверхностях $z = b_k$ ($k = 1, \dots, s$).

При построении приближенного решения на основе аппроксимации (2) часть данных условий видоизменяется и ослабляется, за исключением условий Дирихле (а), которые в силу выполнения нулевых равенств (5) при $\Delta t_{dn}(z) = \text{const}$, $\Delta t_{up}(z) = \text{const}$ могут быть записаны точно в исходной формулировке. Условия (б), (в), (г) сформулируем приближенно в интегральной форме. Принятие базисных функций (8) или (9) в силу обеспечения $\partial f_k(y, b_k)/\partial z = 0$ приводит к автоматическому выполнению требований (д). К перечисленным условиям необходимо добавить требования ортогональности невязок дифференциальных уравнений (1) по отношению к базисным функциям (ниже они обозначены через «е»). В результате получим систему следующих уравнений:

$$t_1(y_1, z) = c_{11} + c_{12}h^{-1}y_1 = \Delta t_{dn},$$

$$t_s(y_{s+1}, z) = c_{s1} + c_{s2}h^{-1}y_{s+1} = \Delta t_{up}; \quad (a)$$

$$\int_0^{b_{k,\min}} t_k(y_{k+1}, z) dz =$$

$$= \int_0^{b_{k,\min}} t_{k+1}(y_{k+1}, z) dz, \quad k = 1, \dots, s-1; \quad (б)$$

$$\lambda_k \int_0^{b_{k,\min}} \frac{\partial t_k(y_{k+1}, z)}{\partial y} dz =$$

$$= \lambda_{k+1} \int_0^{b_{k,\min}} \frac{\partial t_{k+1}(y_{k+1}, z)}{\partial y} dz,$$

$$k = 1, \dots, s-1; \quad (в) \quad (11)$$

$$\int_{b_{k,\min}}^{b_{k,\max}} \frac{\partial t_k(y_{k+1}, z)}{\partial y} dz = 0, \quad k \in K_r; \quad (г)$$

$$\int_{y_k}^{y_{k+1}} \int_0^{b_k} \left[f_k \frac{d^2 A_k}{dy^2} + A_k \frac{d^2 f_k}{dz^2} \right] f_k dy dz = 0, \quad k \in K_\Phi. \quad (е)$$

В (11) имеем: два уравнения (а); $2(s-1)$ уравнений (б) и (в), в которых при отсутствии разрыва на k -й границе следует принять $b_{k,\min} = b_k$; r уравнений (г) на межслойных границах, содержащих разрывы ширины (множество номеров $k \in K_r$). Уравнения ортогональности (е) записываются для слоев, в которых введены поправочные функции (6), из их числа следует исключить дублирование слоев, в пространстве которых пересекаются области определения функций влияния (4), созданные разрывами на разных границах. Множество номеров таких слоев обозначено через K_Φ . Таким образом, система (11) будет содержать

$$n_{eqv} = 2s + \sum_{j=1}^r (\bar{u}_j + \bar{d}_j + 1) \quad (12)$$

уравнений. Здесь $\bar{u}_j \leq u_j$, $\bar{d}_j \leq d_j$ — глубина верхней и нижней функций влияния j -го разрыва ширины в (4), уменьшенных на некоторую величину для исключения областей пересечения.

Условием разрешимости задачи является выполнение равенства $n_p = n_{eqv}$. Требуя его удовлетворения для каждого члена в суммах (10), (12) с номером j , получим условие баланса параметров задачи

$$r_{u_j} + r_{d_j} = \bar{u}_j + \bar{d}_j + 1, \quad (j = 1, \dots, r). \quad (13)$$

При его нарушении для заданной структуры сечения и принятых начальных значений параметров могут быть изменены расчетные значения глубин u_j , d_j функций влияния разрывов (4) либо степени аппроксимации r_{u_j} , r_{d_j} амплитуд (7). В случае $n_p > n_{eqv}$ и необходимости сохранения принятых значений параметров должны быть составлены дополнительные уравнения из группы интегральных равенств (11, б, в, г), записанные для частичных интервалов в соответствующих областях определений.

В рамках предложенного способа решения может быть применен следующий упрощенный прием формирования системы уравнений (11). Для его реализации, с целью обеспечения $n_p = n_{eqv}$, следует, во-первых, при назначении параметров глубины u_j , d_j функций влияния r разрывов исключить пересечение областей их определения, получив $\bar{u}_j = u_j$, $\bar{d}_j = d_j$. Это означает, что на распределение температуры в k -м слое, расположенном между j -м и $j+1$ -м разрывами ширины, оказывать влияние может лишь один из них. Во-вторых, записать дополнительное интегральное уравнение неразрывности температуры (11, б) на каждом разрыве ширины сечения для частичного интервала $z \in [0; \delta \cdot b_{k,\min}]$ (где $0 < \delta < 1$ — безразмерный параметр) общего участка межслойной границы. Тогда условие баланса параметров (13) примет вид

$$r_{u_j} + r_{d_j} = u_j + d_j + 2, \quad (j = 1, \dots, r),$$

что иллюстрирует правило: на каждом j -м разрыве ширины сумма степеней r_{u_j} , r_{d_j} аппроксимаций амплитуд (7) должна на две единицы превышать сумму параметров глубины u_j , d_j ($j = 1, \dots, r$) функций влияния (4).

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Рассмотрим решение задачи, сформулированной соотношениями (1)–(7), (9), (11), на примере поперечно-слоистого стержня постоянного таврового сечения (рис. 3). Полка тавра шириной $B_n = 100$ мм и высотой $H_n = 50$ мм в направлении оси y разделена на три слоя ($h_1 = h_2 = h_3$), а стенка шириной $B_c = 50$ мм и высотой $H_c = 125$ мм — на четыре ($h_4 = \dots = h_7$). Нечетные слои выполнены из углепластика с коэффициентом теплопроводности $\lambda_{уг} = 0,9$ Вт/м·гр, четные — из стали, $\lambda_{ст} = 52$ Вт/м·гр. На нижней и верхней поверхностях стержня заданы изменения температур $\Delta t_{dn} = 60^\circ \text{C}$ и $\Delta t_{up} = -60^\circ \text{C}$ соответственно.

При построении аналитического решения для данного семислойного стержня с одним разрывом ширины на четвертой границе принято: $y_4 = 0$; глубина функций влияния (4) $u_j = d_j = 2$; степени аппроксимации амплитуд (7) $r_u = r_d = 3$; базисные функции в тригонометрической форме (9) $f_2(z) = f_3(z) = \cos(2\pi z/B_n) - 1$, $f_4(z) = f_5(z) = \cos(2\pi z/B_c) - 1$. Таким образом, поле температур (2) задано линейным в 1, 6, 7 слоях и нелинейным — во 2, 3, 4, 5 слоях. Разрешающая система (11) содержала 20 уравнений, из них: два граничных условия (а), шесть условий сопряжения по температуре (б), шесть условий сопряжения плотностей тепловых потоков (в), одно условие типа (г) на участке разрыва (свесе полки), четыре условия ортогональности (е) и одно дополнительное равенство типа (б) на частичном интервале $z \in [0; 0,4B_c]$ в уровне $y = y_4$. В результате решения получены сле-

Рис. 3. Слева направо: тавровое поперечное сечение семислойного неоднородного стержня, график температуры $t(y, 0)$ на оси симметрии сечения (--- — аналитическое решение (3), — — МКЭ), теоретический график амплитуды $A(y)$ поправочной функции (6)

Fig. 3. From left to right: a T-shaped cross section of a seven-layer inhomogeneous rod, $t(y, 0)$ — a temperature graph on the axis of symmetry of the section (--- — analytical solution (3), — — FEM), $A(y)$ — a graph of the theoretical amplitude of the correction function (6)

дующие значения параметров аппроксимации расчетного поля температур (2)–(7) в семи слоях сечения:

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \\ c_{41} & c_{42} \\ c_{51} & c_{52} \\ c_{61} & c_{62} \\ c_{71} & c_{72} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,80 & -203,70 \\ 38,75 & -9,67 \\ 30,32 & -98,13 \\ 30,34 & -4,90 \\ 73,96 & -250,31 \\ -13,15 & -6,48 \\ 116,40 & -246,99 \end{bmatrix},$$

$$A_{4,up} \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,113 & -0,632 & 0,889 \\ -5,074 & 0,112 & -0,918 \end{bmatrix}.$$

Для тестирования предложенного метода решения в среде Ansys-17 был выполнен конечно-элементный расчет с использованием элементов типа «гексаэдр». Сгенерированная пространственная модель в продольном направлении содержала 400 элементов; 20 и 10 — по ширине и высоте полки; 10 и 25 — по ширине и высоте стенки. Использовались численные результаты расчета для средней части по длине стержня, удаленные от концов стержня, в которых проявлялись краевые эффекты. Дальнейшее сгущение сетки КЭ не приводило к существенному уточнению результатов. В данном тестовом примере результаты расчета по МКЭ были приняты за условно точные.

Рис. 4. Графики температуры $t(y, z)$ при различных значениях y . В полке тавра при $y = y_1$ (●), $y = y_3$ (○), $y = y_4$ (■); в стенке тавра при $y = y_4$ (Δ), $y = y_6$ (▲), $y = y_8$ (◆), соответственно

Fig. 4. Temperature graphs $t(y, z)$ for various values of y . In the horizontal element of T-shaped section with $y = y_1$ (●), $y = y_3$ (○), $y = y_4$ (■); in the vertical element of T-shaped section with $y = y_4$ (Δ), $y = y_6$ (▲), $y = y_8$ (◆), respectively

На рис. 3 приведено распределение температуры на оси симметрии сечения ($z = 0$). Теоретическое (3) отмечено пунктиром, а численное — сплошной линией. На правой схеме рис. 3 показаны теоретические графики нижней и верхней амплитуд поправочных функций, в соответствии с исходными данными заданных на глубине двух слоев выше и ниже уровня разрыва функции ширины сечения.

Двумерное поле температур (2) отражено на рис. 4 в виде графиков $t(z)$, построенных для линий в сечении с различными значениями координаты y .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ОБСУЖДЕНИЕ

Результаты численного исследования температурного поля в слоистом стержне, имеющего разрывы геометрической функции $b(y)$ в поперечном направлении y , совпадающем с направлением теплового потока, показывают непригодность полилинейного распределения температуры (3). Как следует из графиков $t(z)$ на рис. 4, наибольшие отклонения от линейности наблюдаются в окрестности разрыва функции ширины (при $y = y_4$) и достигают максимума на линии, отмеченной маркером ■. На ней наибольшие искривления характерны для области $z \in [b_2, b_1]$, соответствующей «свесу» полки тавра. Это объясняется резким изменением условия для функции $\partial t(y, z) / \partial y$ на межслойной границе $y = y_4$.

Данная особенность температурного поля подтверждается графиками расчетных амплитуд $A(y)$ поправочных функций (6), приведенных на рис. 3. Наибольшая амплитуда нелинейных поправок наблюдается в полке тавра в окрестности ее границы со стенкой. В стенке тавра в пределах каждого слоя распределение температуры практически близко к линейному.

Для данного примера характерна значительная неоднородность свойств теплопроводности в направлении оси y . Коэффициенты теплопроводности

четных $\lambda_{ст}$ и нечетных $\lambda_{уг}$ слоев отличались в 57,7 раза. Этим объясняется малость градиентов $\partial t / \partial y$ для четных слоев из стали (см. график $t(y, 0)$ на рис. 3). Термическое сопротивление элемента, расположенного в стальном слое около границы с углепластиком в направлении z (материал — сталь), существенно меньше, чем в направлении y (переход ст–уг). Данная структурная особенность приводила к «выпрямлению» линии $t(z)$ в стальных слоях, но по мере приближения к уровню разрыва $y = y_4$ кривизна линий нарастала (рис. 4).

Результаты аналитического расчета, показанные пунктиром на графиках рис. 3, 4, удовлетворительно соответствуют результатам численного решения. На верхней и нижней границах и те, и другие результаты практически точно соответствуют граничным условиям Дирихле (11, а), а во внутренних областях слоистого сечения при использовании интегральных условий сопряжения на межслойных границах (11, б, в, г) имеем их удовлетворительное соответствие.

Предложенный метод аналитического моделирования температурного поля, основанный на задании формы температурной функции в направлении z с переменной в направлении y амплитудой, обладает приемлемой вычислительной трудоемкостью и удовлетворительной точностью. Для данного метода, в отличие от [22], характерна независимость числа параметров нелинейной части аппроксимации от числа слоев в стержне, что повышает эффективность его использования в многослойных структурах, в том числе при решении задач термоупругости в рамках технических теорий стержней Тимошенко или Бернулли, что составляет предмет дальнейших исследований. Интерес также представляет нахождение температурных полей и напряженного состояния в стержнях при других направлениях теплового потока и при рассмотрении более сложных неоднородных структур.

ЛИТЕРАТУРА

1. Немировский Ю.В., Янковский А.П. Теплопроводность однородных и композитных тонкостенных конструкций. Новосибирск : Арт-Авеню, 2008. 512 с.
2. Мищенко А.В. Расчетная модель нелинейного динамического деформирования составных многофазных стержней // Вестник МГСУ. 2014. № 5. С. 35–43. DOI: 10.22227/1997-0935.2014.5.35-43
3. Yankovskii A.P. Refined modeling of flexural deformation of layered plates with a regular structure made from nonlinear hereditary materials // Mechanics of Composite Materials. 2018. Vol. 53. No. 6. Pp. 705–724. DOI: 10.1007/s11029-018-9697-9
4. Mohanty R.C., Nanda B.K. Investigation into the dynamics of layered and jointed cantilevered beams // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science. 2010. Vol. 224. Issue 10. Pp. 2129–2139. DOI: 10.1243/09544062jmes1939
5. Turusov R.A. Elastic and thermal behavior of a layered structure I. Experiment and theory // Mechanics of Composite Materials. 2015. Vol. 50. No. 6. Pp. 801–808. DOI: 10.1007/s11029-015-9469-8
6. Škec L., Jelenić G. Analysis of a geometrically exact multi-layer beam with a rigid interlayer connection

tion // *Acta Mechanica*. 2013. Vol. 225. No. 2. Pp. 523–541. DOI: 10.1007/s00707-013-0972-5

7. *Heidarpour A., Bradford M.A.* Nonlinear analysis of composite beams with partial interaction in steel frame structures at elevated temperature // *Journal of Structural Engineering*. 2010. Vol. 136. Issue 8. Pp. 968–977. DOI: 10.1061/(asce)st.1943-541x.0000189

8. *Vosoughi A.R., Malekzadeh P., Banan Mo.R., Banan Ma.R.* Thermal postbuckling of laminated composite skew plates with temperature-dependent properties // *Thin-Walled Structures*. 2011. Vol. 49. No. 7. Pp. 913–922. DOI: 10.1016/j.tws.2011.02.017

9. *Thuç P.Vo., Huu-Tai Thai.* Vibration and buckling of composite beams using refined shear deformation theory // *International Journal of Mechanical Sciences*. 2012. Vol. 62. Issue 1. Pp. 67–76. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2012.06.001

10. *Hohe J., Becker W.* An energetic homogenisation procedure for the elastic properties of general cellular sandwich cores // *Composites Part B: Engineering*. 2001. Vol. 32. No. 3. Pp. 185–197. DOI: 10.1016/s1359-8368(00)00055-x

11. *Iváñez I., Moure M.M., García-Castillo S.K., Sánchez-Sáez S.* The oblique impact response of composite sandwich plates // *Composite Structures*. 2015. Vol. 133. Pp. 1127–1136. DOI: 10.1016/j.compstruct.2015.08.035

12. *Gorbachev V.I.* Heat propagation in a nonuniform rod of variable cross section // *Moscow University Mechanics Bulletin*. 2017. Vol. 72. No. 2. Pp. 48–53. DOI: 10.3103/s0027133017020042

13. *Ищук И.Н.* Решение задачи теплопроводности для периодического теплового потока на основе телеграфного уравнения // *Вестник Тамбовского государственного технического университета*. 2006. Т. 12. № 3–1. С. 690–694.

14. *Видин Ю.В., Казаков Р.В.* Распространение тепла вдоль неоднородного ребра постоянного поперечного сечения // *Известия Томского политехнического университета*. 2011. Т. 319. № 4. С. 29–31.

15. *Lin T.J., Yang Y.B., Huang C.W.* Inelastic nonlinear behavior of steel trusses cooled down from a heating stage // *International Journal of Mechanical Sciences*. 2010. Vol. 52. No. 7. Pp. 982–992. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2010.03.014

16. *Гереништейн А.В., Бездетнов А.Л.* Температурное поле неоднородного стержня // *Сервис технических систем — основа безопасного функционирования машин и оборудования предприятий АПК: мат. Междунар. науч.-практ. конф. Института агроинженерии, Челябинск, 15–17 февраля 2018. Троицк: Южно-Уральский государственный аграрный университет, 2018. С. 102–108.*

ицк: Южно-Уральский государственный аграрный университет, 2018. С. 102–108.

17. *Грицюк Е.М.* Модели и методы анализа температурных и термомеханических полей в телах сложной формы в специализированной интеллектуальной системе // *Технологический аудит и резервы производства*. 2017. Т. 1. № 1 (33). С. 9–15. DOI: 10.15587/2312-8372.2017.91794

18. *Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В.* Деформирование трехслойного стержня в температурном поле // *Механика машин, механизмов и материалов*. 2013. № 1 (22). С. 31–35. URL: <http://mmmm.by/ru/readers/36-arkhiv-nomerov1/1-2013-s/207-1-2013-s-4>

19. *Яковенко В.А., Марцулевич Н.А.* Математическое моделирование теплопроводности тел сложной формы методом граничных интегральных уравнений // *Теоретические основы химической технологии*. 2003. Т. 37. № 2. С. 170–173.

20. *Немировский Ю.В., Янковский А.П.* Асимптотический анализ нестационарной задачи теплопроводности конструктивно и физически неоднородных композитных стержней при анизотропии общего вида // *Конструкции из композиционных материалов*. 2008. № 4. С. 10–27.

21. *Пискунов В.Г., Сунетов В.С.* Об одном подходе к решению задач термоупругости слоистых пластин // *Строительная механика и расчет сооружений*. 1986. № 1. С. 28–31.

22. *Мищенко А.В.* Моделирование двумерных температурных полей в структурно-неоднородных стержнях с разрывными геометрическими параметрами // *Известия высших учебных заведений. Строительство*. 2018. № 1 (709). С. 5–15. DOI: 10.32683/0556-1052-2018-709-1-5-15

23. *Yu J.G., Lefebvre J.E., Zhang Ch.* Guided waves in general anisotropic layered rectangular rods: An extended orthogonal polynomial approach // *Mathematics and Mechanics of Solids*. 2014. Vol. 21. Issue 5. Pp. 636–646. DOI: 10.1177/1081286514533340

24. *Кудинов В.А., Кудинов И.В.* Методы решения параболических и гиперболических уравнений теплопроводности. М.: Либроком, 2015. 280 с.

25. *Wennberg D., Stichel S., Wennhage P.* Finite difference adaptation of the decomposition of layered composite structures on irregular grid // *Journal of Composite Materials*. 2013. Vol. 48. Issue 20. Pp. 2427–2439. DOI: 10.1177/0021998313499196

26. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. 6-е изд. М.: Изд-во МГУ, 1999. 798 с.

Поступила в редакцию 12 сентября 2018 г.

Принята в доработанном виде 11 ноября 2018 г.

Одобрена для публикации 24 декабря 2018 г.

ОБ АВТОРЕ: Мищенко Андрей Викторович — доктор технических наук, доцент, профессор кафедры строительной механики, Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет (Сибстрин) (НГАСУ (Сибстрин)), 630008, г. Новосибирск, ул. Ленинградская, д. 113, mavr59@ngs.ru.

REFERENCES

1. Nemirovsky Yu.V., Yankovsky A.P. *Thermal conductivity of homogeneous and composite thin-walled structures*. Novosibirsk, Art-Avenue Publ., 2008; 512. (rus.).
2. Mishchenko A.V. Calculation model of non-linear dynamic deformation of composite multiphase rods. *Vestnik MGSU* [Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering]. 2014; 5:35-43. DOI: 10.22227/1997-0935.2014.5.35-43 (rus.).
3. Yankovskii A.P. Refined modeling of flexural deformation of layered plates with a regular structure made from nonlinear hereditary materials. *Mechanics of Composite Materials*. 2018; 53(6):705-724. DOI: 10.1007/s11029-018-9697-9
4. Mohanty R.C., Nanda B.K. Investigation into the dynamics of layered and jointed cantilevered beams. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*. 2010; 224(10):2129-2139. DOI: 10.1243/09544062JMES1939
5. Turusov R.A. Elastic and thermal behavior of a layered structure I. Experiment and theory. *Mechanics of Composite Materials*. 2015; 50(6):801-808. DOI: 10.1007/s11029-015-9469-8
6. Škec L., Jelenić G. Analysis of a geometrically exact multi-layer beam with a rigid interlayer connection. *Acta Mechanica*. 2013; 225(2):523-541. DOI: 10.1007/s00707-013-0972-5
7. Heidarpour A., Bradford M.A. Nonlinear analysis of composite beams with partial interaction in steel frame structures at elevated temperature. *Journal of Structural Engineering*. 2010; 136(8):968-977. DOI: 10.1061/(asce)st.1943-541x.0000189
8. Vosoughi A.R., Malekzadeh P., Banan Mo.R., Banan Ma.R. Thermal postbuckling of laminated composite skew plates with temperature-dependent properties. *Thin-Walled Structures*. 2011; 49(7):913-922. DOI: 10.1016/j.tws.2011.02.017
9. Thuç P.Vo., Huu-Tai Thai. Vibration and buckling of composite beams using refined shear deformation theory. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2012; 62(1):67-76. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2012.06.001
10. Hohe J., Becker W. An energetic homogenisation procedure for the elastic properties of general cellular sandwich cores. *Composites Part B: Engineering*. 2001; 32(3):185-197. DOI: 10.1016/s1359-8368(00)00055-x
11. Iváñez I., Moure M.M., García-Castillo S.K., Sánchez-Sáez S. The oblique impact response of composite sandwich plates. *Composite Structures*. 2015; 133:1127-1136. DOI: 10.1016/j.compstruct.2015.08.035
12. Gorbachev V.I. Heat propagation in a nonuniform rod of variable cross section. *Moscow University Mechanics Bulletin*. 2017; 72(2):48-53. DOI: 10.3103/s0027133017020042
13. Ishchuk I.N. Solution of the problem of heat conduction for periodic heat flow on the basis of telegraphy equation. *Bulletin of Tambov State Technical University*. 2006; 12(3-1):690-694. (rus.).
14. Vidin Yu.V., Kazakov R.V. Heat distribution along an inhomogeneous edge of a constant cross section. *Bulletin of Tomsk Polytechnic University*. 2011; 319(4):29-31. (rus.).
15. Lin T.J., Yang Y.B., Huang C.W. Inelastic nonlinear behavior of steel trusses cooled down from a heating stage. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2010; 52(7):982-992. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2010.03.014
16. Gerenshtein A.V., Bezdetnov A.L. Temperature field of a heterogeneous rod. *Service of technical systems is the basis for the safe operation of machines and equipment of agricultural enterprises: Materials of the International Scientific and Practical Conference of the Institute of Agroengineering, Chelyabinsk, 15–17 February 2018*. Troitsk, South Ural State Agrarian University Publ., 2018; 102-108. (rus.).
17. Gritsuk E.M. Models and methods for analysis of temperature and thermomechanical fields in the bodies of complex shape in specialized intelligent system. *Technological audit and production reserves*. 2017; 1:1(33):9-15. DOI: 10.15587/2312-8372.2017.91794 (rus.).
18. Starovoytov E.I., Leonenko D.V. Deformation of a three-layer beam in a temperature field. *Mechanics of machines, mechanisms and materials*. 2013; 1(22):31-35. URL: <http://mmmm.by/ru/readers/36-arkhiv-nomerov1/1-2013-s/207-1-2013-s-4> (rus.).
19. Yakovenko V.A., Martsulevich N.A. Mathematical modeling of heat conduction in complex-shaped bodies by the boundary integral equation method. *Theoretical foundations of chemical technology*. 2003; 37(2):170-173. (rus.).
20. Nemirovskii Yu.V., Yankovskii A.P. Asymptotical analysis of non-stationary problem of thermal conductivity of constructively and physically non-

form composit rods at anisotropy of general view. *Composite materials constructions*. 2008; 4:10-27. (rus.).

21. Piskunov V.G., Sipetov V.S. On one approach to solving the problems of thermoelasticity of layred plates. *Structural Mechanics and Analysis of Constructions*. 1986; 1:28-31. (rus.).

22. Mishchenko A.V. Two-dimensional temperature fields in modeling of structural-heterogeneous rods with geometrical discontinuous parameters. *News of Higher Educational Institutions. Construction*. 2018; 1(709):5-15. DOI 10.32683/0556-1052-2018-709-1-5-15 (rus.).

23. Yu J.G., Lefebvre J.E., Zhang Ch. Guided waves in general anisotropic layered rectangular rods:

An extended orthogonal polynomial approach. *Mathematics and Mechanics of Solids*. 2014; 21(5):636-646. DOI: 10.1177/1081286514533340

24. Kudinov V.A., Kudinov I.V. *Methods for solving parabolic and hyperbolic equations of heat conduction*. Moscow, Librocom Publ., 2015; 280. (rus.).

25. Wennberg D., Stichel S., Wennhage P. Finite difference adaptation of the decomposition of layered composite structures on irregular grid. *Journal of Composite Materials*. 2013; 48(20):2427-2439. DOI: 10.1177/0021998313499196

26. Tikhonov A.N., Samarsky A.A. *Equations of mathematical physics*. Moscow, Publishing House of Moscow State University, 1999; 798. (rus.).

Received September 12, 2018.

Adopted in a modified form on November 11, 2018.

Approved for publication December 24, 2018.

ABOUT THE AUTHOR: **Andrey V. Mishchenko** — Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, Professor of the Department of Structural Mechanics, **Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering (Sibstrin) (NSUACE (Sibstrin))**, 113 Leningradsкая st., Novosibirsk, 630008, Russian Federation, mavr59@ngs.ru.