Динамика ламинарных течений с коаксиальными противоположно вращающимися слоями

А.Л. Зуйков^{1,2}

¹Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ),
125319, г. Москва, Ленинградский пр-т, д. 64;

²Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет
(НИУ МГСУ), 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26

АННОТАЦИЯ

Введение. Рассмотрены напорные ламинарные течения каплевой жидкости с коаксиальными слоями, вращающимися во встречных направлениях, — контрвихревые течения. Турбулентные контрвихревые течения характеризуются интенсивным перемешиванием среды, что может использоваться для эффективного сжигания топлива в теплоэнергетике и в ракетных двигателях или для получения высокодисперсных смесей во многих других высокотехнологичных отраслях современной промышленности. Цель теоретического исследования — изучение закономерностей динамики контрвихревых течений.

Материалы и методы. В основу теоретической модели ламинарного контрвихревого течения положены классические дифференциальные уравнения Навье – Стокса и неразрывности.

Результаты. Принимая радиальные скорости пренебрежимо малыми и используя озееновское приближение, система уравнений Навье – Стокса сводится к двум линейным дифференциальным уравнениям параболического типа. Решение последних получено в виде рядов и произведений рядов Фурье – Бесселя. Приведены аналитические формулы для расчета радиально-продольных распределений нормированных азимутальных, аксиальных и радиальных скоростей в исследуемом течении. Графически представлены: скорости в виде радиальных профилей, линии тока и вязкие вихревые поля. Рассмотрены двухслойное и четырехслойное контрвихревые течения. Выполнен анализ теоретических результатов.

Выводы. На оси в начале активной зоны характерно формирование возвратного течения со значительными отрицательными скоростями. Это приводит к образованию рециркуляционной области, массообмен между ней и обтекающим ее потоком отсутствует. В активной зоне генерируются каскады концентрических вихрей столь высокой интенсивности, подобной которой нет в потоках иной природы. Расчетные формулы включают экспоненту $\exp(-\lambda^2 x / \text{Re})$, умноженную на число Рейнольдса в степени $b = 0$ или $b = -1$, поэтому увеличение числа Рейнольдса при $b = 0$ приводит к пропорциональному «сносу» профиля произвольной характеристики контрвихревого течения вниз по течению; а при $b = -1$ «снос» профиля сопровождается пропорциональным снижением его масштаба.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: ламинарное контрвихревое течение, уравнения Навье – Стокса, ряды Фурье – Бесселя

ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ: Зуйков А.Л. Динамика ламинарных течений с коаксиальными противоположно вращающимися слоями // Вестник МГСУ. 2019. Т. 14. Вып. 3. С. 332–346. DOI: 10.22227/1997-0935.2019.3.332-346

Dynamics of laminar flows with coaxial oppositely-rotating layers

Andrey L. Zuykov^{1,2}

¹ Moscow Automobile and Road Construction State Technical University (MADI),
64 Leningradsky prospect, Moscow, 125319, Russian Federation;

² Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (MGSU),
26 Yaroslavskoe shosse, Moscow, 129337, Russian Federation

ABSTRACT

Introduction. The work relates to the scientific foundations of hydraulic and energy construction and is devoted to the study of laminar flows with coaxial oppositely-rotating layers. In the literature, such flows are called counter-vortex. In the turbulent range, counter-vortex flows are characterized by intensive mixing of the medium, which is widely used in the technologies of mixing non-natural and multi-phase media in thermal and atomic energy, in systems of mass- and heat transfer, in chemistry and microbiology, ecology, engine and rocket production. The aim of the theoretical study is to study the physical laws of the hydrodynamics of counter-vortex flows.

Research methods. The theoretical Navier-Stokes equations and continuity equation are the basis of the theoretical model of the laminar counter-vortex flow.

Results. Assuming the radial velocities are much less than the azimuthal and axial velocities and taking the Oseen approximation, the solution of the Navier – Stokes equations is obtained as Fourier – Bessel series or products of Fourier – Bessel series. In particular, the following were obtained: formulas for calculating the radial-longitudinal distributions of the normalized azimuthal, axial and radial velocities in the flow under study, the velocities are presented graphically in the form of radial profiles; equations for the calculation of current lines and viscous vortex fields, which are also presented in the form

of graphs, were obtained. The two-layer and four-layer counter-vortex flows are considered. The analysis of the obtained theoretical results is performed.

Conclusions. On the axis at the beginning of the active zone, the formation of a return flow with significant negative velocities is characteristic. This leads to the formation of a recirculation region, the mass exchange between which and the external flow is absent. Cascades of concentric vortices of such high intensity that are not found in streams of a different nature are generated in the active zone. Calculation formulas include $\exp(-\lambda^2 x / \text{Re})$ exponent multiplied by Reynolds number in degree $b = 0$ or $b = -1$, therefore increasing Reynolds number when $b = 0$ leads to proportional transfer of arbitrary characteristic counter-vortex flow down the pipe; and at $b = -1$, the bias of characteristic is accompanied by a proportional decrease in its scale.

KEYWORDS: laminar counter-vortex flow, the Navier – Stokes's equations, Fourier – Bessel's series

FOR CITATION: Zuikov A.L. Dynamics of laminar flows with coaxial oppositely-rotating layers. *Vestnik MGSU* [Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering]. 2019; 14:3:332-346. DOI: 10.22227/1997-0935.2019.3.332-346 (rus.).

ВВЕДЕНИЕ

Контрвихревым¹ называется неравномерное циркуляционно-продольное напорное течение жидкости или газа, в котором коаксиальные слои имеют встречную закрутку. В процессе вязкого трения встречная закрутка взаимодействующих слоев затухает и контрвихревое течение трансформируется в продольно-осевой равномерный поток. Характерная пространственная структура контрвихревого течения с двумя взаимодействующими слоями показана на рис. 1.

Начало исследования контрвихревых течений было положено разработкой водосбросов высоко-

¹ Стандарт СО 34.21.308-2005. Гидротехника. Основные понятия. Термины и определения. СПб. : Изд-во ВНИИГ им. Б.Е. Веденеева, 2005. 51 с.

напорных гидроузлов [1, 2]. К настоящему времени контрвихревые течения, в которых в турбулентном диапазоне существенно интенсифицируются процессы массо-, энерго- и теплопереноса, применяют в технологиях, требующих получения высокодисперсных смесей или повышения эффективности теплообмена [3–14]. Такие течения наблюдаются также в конусах отсасывающих труб гидротурбин Френсиса при ненормальных режимах их работы [15, 16]. Сегодня устойчивая работа гидротурбин Френсиса является серьезной проблемой, связанной с быстрым самогашением встречной закрутки взаимодействующих слоев, «распадом» контрвихревого течения (в англоязычной литературе явление называется «vortex breakdown»), сопровождающимся значительным возрастанием вибраций гидроагрегатов, вплоть до их разрушения.

Рис. 1. Структура контрвихревого течения в цилиндрической трубе: *a* — профили азимутальных u_θ и аксиальных u_x скоростей двухслойного течения; *b* — составляющие векторов скорости, вихря элементарной частицы жидкости и тензора вязких напряжений

Fig. 1. Structure of the flow with coaxial oppositely-rotation layers in a cylindrical pipe: *a* — profiles of the azimuthal u_θ and axial u_x velocities of two-layers flow; *b* — components of velocity vectors, of the vortex of an elementary particle of a fluid and of viscous stress tensor

Развитие перечисленных технологий и острая проблема надежности крупных гидроагрегатов требуют знаний гидродинамики контрвихревых течений, полученных в результате физического [17–29], численного [23–30] или аналитического моделирования. В статье акцент сделан на теоретических исследованиях структуры контрвихревых ламинарных течений и анализе полученных результатов, основой которых послужили опубликованные в последнее время работы [30–34]. Цель теоретического исследования — выявление физических закономерностей динамики контрвихревых течений.

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Статья посвящена анализу симметричного относительно оси цилиндрического канала (см. рис. 1) неравномерного контрвихревого течения вязкой несжимаемой жидкости, описываемого уравнениями Навье – Стокса [35].

$$\left. \begin{aligned} u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_x \frac{\partial u_r}{\partial x} - \frac{u_\theta^2}{r} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\Pi + \frac{P}{\rho} \right) + \nu \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{\partial u_r}{r \partial r} - \frac{u_r}{r^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2} \right), \\ u_r \frac{\partial (ru_\theta)}{r \partial r} + u_x \frac{\partial u_\theta}{\partial x} &= \nu \left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{\partial u_\theta}{r \partial r} - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial x^2} \right), \\ u_r \frac{\partial u_x}{\partial r} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} &= -\frac{\partial}{\partial x} \left(\Pi + \frac{P}{\rho} \right) + \nu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial r^2} + \frac{\partial u_x}{r \partial r} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \right), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где Π и P — потенциал внешних массовых сил и давление; ρ и ν — плотность и кинематическая вязкость жидкости; u_r , u_θ и u_x — радиальная, азимутальная и продольная составляющие скорости течения.

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Опуская радиальные скорости, пренебрежимо малые по отношению к азимутальным и осевым, и используя озееновское приближение [36], система уравнений Навье – Стокса сводится к линейным нормированным дифференциальным уравнениям параболического типа.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_\theta}{\partial x} &= \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{\partial u_\theta}{r \partial r} - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial x^2} \right), \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_\theta^2}{r} \right) + \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial r} &= \frac{1}{\text{Re}} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial r^2} + \frac{\partial u_x}{r \partial r} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

При нормировании уравнений (2), учтено: Re — число Рейнольдса, $\text{Re} = VR/\nu$; R — радиус трубы; Q/VR^2 — расход трубы.

Граничные условия для системы уравнений (2) на стенках цилиндрической трубы ($r = 1$), ее оси ($r = 0$), на входе ($x = 0$) в активную зону — зону взаимодействия коаксиальных слоев с противоположным вращением и на бесконечном удалении от входа ($x = \infty$), имеют вид

$$\left. \begin{aligned} u_\theta &= u_x = 0 && \text{при } r = 1 \text{ для } x > 0, \\ u_\theta &= \frac{\partial u_x}{\partial r} = 0 && \text{при } r = 0 \text{ для } x > 0, \\ u_\theta &= \Omega_0 r + \frac{\Gamma_0}{r} + A_0 J_1(\mu r) && \text{при } x = 0 \text{ для } 0 \leq r \leq 1, \\ u_\theta &= 0; \quad u_x = 2(1 - r^2) && \text{при } x = \infty \text{ для } 0 \leq r \leq 1, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где Ω_0 , Γ_0 и A_0 — задаваемые нормированные коэффициенты радиального распределения азимутальных скоростей на входе в активную зону; $J_1(\dots)$ — функция Бесселя [37] первого рода первого порядка; μ — константа, не равная λ_n ; λ_n — корень функции Бесселя $J_1(\lambda_n) = 0$.

Решения приведены в цитируемых выше работах [30–34], дополняющих друг друга в хронологическом порядке.

$$u_\theta(r, x, \text{Re}) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} G_n \frac{J_1(\lambda_n r)}{\lambda_n J_0(\lambda_n)} \exp\left(-\lambda_n^2 \frac{x}{\text{Re}}\right), \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
u_x(r, x, \text{Re}) = & 2(1-r^2) - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{4}{\lambda_i^2} \left[1 - \frac{J_0(\lambda_i r)}{J_0(\lambda_i)} \right] \exp\left(-\lambda_i^2 \frac{x}{\text{Re}}\right) + \\
& + 2 \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G_n}{\lambda_n^2} \left[1 + \frac{J_0(\lambda_n \sqrt{2}) - J_0(\lambda_n \sqrt{2} r)}{J_2(\lambda_n \sqrt{2})} \right] \exp\left(-\lambda_n^2 \frac{x}{\text{Re}}\right) \sum_{k=1}^{\infty} G_k \exp\left(-\lambda_k^2 \frac{x}{\text{Re}}\right) - \right. \\
& - \sum_{n=1}^{\infty} G_n \frac{J_0(\lambda_n r)}{\lambda_n^2 J_0(\lambda_n)} \exp\left(-\lambda_n^2 \frac{x}{\text{Re}}\right) \sum_{k=1}^{\infty} G_k \frac{J_0(\lambda_k r)}{J_0(\lambda_k)} \exp\left(-\lambda_k^2 \frac{x}{\text{Re}}\right) - \\
& \left. - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G_n^2}{\lambda_n^2} \left[\frac{J_0(\lambda_n \sqrt{2}) - J_0(\lambda_n \sqrt{2} r)}{J_2(\lambda_n \sqrt{2})} \right] \exp\left(-2\lambda_n^2 \frac{x}{\text{Re}}\right) \right\}, \quad (5)
\end{aligned}$$

где $J_0(\dots)$ и $J_2(\dots)$ — функция Бесселя первого рода нулевого и второго порядков; λ_i — действительные нули функции Бесселя первого рода второго порядка $J_2(\lambda_i) = 0$; λ_n и λ_k — действительные нули функции Бесселя первого рода первого порядка $J_1(\lambda_n) = 0$, $J_1(\lambda_k) = 0$; G_n и G_k — постоянные n -го и k -го частных решений

$$G_n = \Gamma_0 \left[\frac{1}{J_0(\lambda_n)} - 1 \right] - \Omega_0 - \frac{A_0 J_1(\mu)}{1 - (\mu/\lambda_n)^2}, \quad G_k = \Gamma_0 \left[\frac{1}{J_0(\lambda_k)} - 1 \right] - \Omega_0 - \frac{A_0 J_1(\mu)}{1 - (\mu/\lambda_k)^2}. \quad (6)$$

В монографии [30] вторые частные производные в правых частях уравнений (2) $\partial^2 u_\theta / \partial x^2$ и $\partial^2 u_x / \partial x^2$ принимались пренебрежимо малыми, и ставилось условие сохранения объемного расхода

$$2 \int_0^1 u_x r dr = 1 \quad \text{для } x \geq 0.$$

В той же монографии [30] из уравнения неразрывности

$$\frac{\partial(r u_r)}{r \partial r} + \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0$$

получено также радиально-аксиальное распределение и радиальных скоростей

$$\begin{aligned}
u_r(r, x, \text{Re}) = & -\frac{2}{\text{Re}} \sum_{i=1}^{\infty} \left[r - \frac{2J_1(\lambda_i r)}{\lambda_i J_0(\lambda_i)} \right] \exp\left(-\lambda_i^2 \frac{x}{\text{Re}}\right) + \\
& + \frac{1}{\text{Re}} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} G_n \left[r + \frac{r J_0(\lambda_n \sqrt{2})}{J_2(\lambda_n \sqrt{2})} - \frac{\sqrt{2} J_1(\lambda_n r \sqrt{2})}{\lambda_n J_2(\lambda_n \sqrt{2})} \right] \exp\left(-\lambda_n^2 \frac{x}{\text{Re}}\right) \sum_{k=1}^{\infty} G_k \exp\left(-\lambda_k^2 \frac{x}{\text{Re}}\right) + \right. \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G_n}{\lambda_n^2} \left[r + \frac{r J_0(\lambda_n \sqrt{2})}{J_2(\lambda_n \sqrt{2})} - \frac{\sqrt{2} J_1(\lambda_n r \sqrt{2})}{\lambda_n J_2(\lambda_n \sqrt{2})} \right] \exp\left(-\lambda_n^2 \frac{x}{\text{Re}}\right) \sum_{k=1}^{\infty} G_k \lambda_k^2 \exp\left(-\lambda_k^2 \frac{x}{\text{Re}}\right) - \\
& - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G_n \lambda_n J_1(\lambda_n r)}{J_0(\lambda_n)} \exp\left(-\lambda_n^2 \frac{x}{\text{Re}}\right) \left[\sum_{k=1}^{n-1} \frac{G_k J_0(\lambda_k r)}{(\lambda_n^2 - \lambda_k^2) J_0(\lambda_k)} \exp\left(-\lambda_k^2 \frac{x}{\text{Re}}\right) + \right. \\
& + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{G_k J_0(\lambda_k r)}{(\lambda_n^2 - \lambda_k^2) J_0(\lambda_k)} \exp\left(-\lambda_k^2 \frac{x}{\text{Re}}\right) \left. \right] - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G_n J_1(\lambda_n r)}{\lambda_n J_0(\lambda_n)} \exp\left(-\lambda_n^2 \frac{x}{\text{Re}}\right) \times \\
& \times \left[\sum_{k=1}^{n-1} \frac{G_k \lambda_k^2 J_0(\lambda_k r)}{(\lambda_n^2 - \lambda_k^2) J_0(\lambda_k)} \exp\left(-\lambda_k^2 \frac{x}{\text{Re}}\right) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{G_k \lambda_k^2 J_0(\lambda_k r)}{(\lambda_n^2 - \lambda_k^2) J_0(\lambda_k)} \exp\left(-\lambda_k^2 \frac{x}{\text{Re}}\right) \right] + \\
& + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G_n J_0(\lambda_n r)}{J_0(\lambda_n)} \exp\left(-\lambda_n^2 \frac{x}{\text{Re}}\right) \left[\sum_{k=1}^{n-1} \frac{G_k \lambda_k J_1(\lambda_k r)}{(\lambda_n^2 - \lambda_k^2) J_0(\lambda_k)} \exp\left(-\lambda_k^2 \frac{x}{\text{Re}}\right) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{G_k \lambda_k J_1(\lambda_k r)}{(\lambda_n^2 - \lambda_k^2) J_0(\lambda_k)} \exp\left(-\lambda_k^2 \frac{x}{\text{Re}}\right) \right] + \\
& + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G_n J_0(\lambda_n r)}{\lambda_n^2 J_0(\lambda_n)} \exp\left(-\lambda_n^2 \frac{x}{\text{Re}}\right) \cdot \left[\sum_{k=1}^{n-1} \frac{G_k \lambda_k^3 J_1(\lambda_k r)}{(\lambda_n^2 - \lambda_k^2) J_0(\lambda_k)} \exp\left(-\lambda_k^2 \frac{x}{\text{Re}}\right) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{G_k \lambda_k^3 J_1(\lambda_k r)}{(\lambda_n^2 - \lambda_k^2) J_0(\lambda_k)} \exp\left(-\lambda_k^2 \frac{x}{\text{Re}}\right) \right] - \\
& - 2 \sum_{n=1}^{\infty} G_n^2 \left[\frac{r J_0^2(\lambda_n r) + r J_1^2(\lambda_n r)}{J_0^2(\lambda_n)} + \frac{r J_0(\lambda_n \sqrt{2})}{J_2(\lambda_n \sqrt{2})} - \frac{\sqrt{2} J_1(\lambda_n r \sqrt{2})}{\lambda_n J_2(\lambda_n \sqrt{2})} \right] \exp\left(-2\lambda_n^2 \frac{x}{\text{Re}}\right) \left. \right\}. \quad (7)
\end{aligned}$$

На рис. 2 представлены радиально-продольные распределения азимутальных, аксиальных и радиальных скоростей в ламинарных контрвихревых течениях, расчеты выполнены при $\text{Re} = 450$. На входе в ак-

тивную зону заданы два течения: первое (режим 1) двухслойное с параметрами $\Omega_0 = 4,241$, $\Gamma_0 = -1,216$, $A_0 = 0$; второе (режим 2) четырехслойное с параметрами $\Gamma_0 = \Omega_0 = 0$, $A_0 J_1(\mu) = 0,1584$, $\mu = 13,3$. Расстояния от входа в активную зону ($x = 0$) до расчетных сечений показаны на рис. 2 на расчетных профилях в долях радиуса. Анализ показывает, что в активной зоне контрвихревые течения трансформируются в течения без закрутки. Длина зоны интенсивного вязкого гашения закрутки взаимодействующих слоев при ламинарном двухслойном течении равна 40 радиусам трубы. При четырехслойном течении — сокращается до 20-ти радиусов трубы.

Для аксиальных скоростей характерно формирование в начале активной зоны возвратного течения. Аналогичный дефицит скоростей наблюдается и в зонах между противоположно вращающимися коаксиальными слоями. Профили аксиальных скоростей в контрвихревых течениях в существенной степени формируются закруткой потока. Поскольку профили аксиальных скоростей в контрвихревых течениях в определенной степени формируются закруткой потока, то продольное течение в пределах активной зоны имеет ряд свойств течения вторичного, зависящего от азимутальной скорости.

На рис. 2 можно видеть, что принятое выше на основе экспериментальных данных [1, 2, 22, 30] допущение о возможности пренебречь в уравнениях динамики вязкой жидкости радиальной составляющей скорости u_r (но не в уравнении неразрывности, поскольку в этом случае нарушается баланс масс) находит аналитическое подтверждение.

Вернемся к аксиальным скоростям. Как отмечалось выше, в начале активной зоны аксиальные скорости как в двухслойном, так и в четырехслойном контрвихревом течении формируют возвратные течения, трансформирующиеся в рециркуляционные зоны, массообмен между которыми и обтекающим их транзитным потоком в условиях ламинарного режима течения исключен. Находящаяся внутри рециркуляционной зоны жидкость вниз по течению не уходит. Можно полагать, что описываемые рециркуляционные области представляют собой кольцевые тороидальные θ -вихри с замкнутыми линиями тока, ограниченные нулевым значением $\Psi = 0$ и точкой торможения на оси трубы. Для выявления рециркуляционных областей в исследуемых течениях найдем распределение функции Ψ , значение которой на оси трубы при $r = 0$ равно $\Psi = 0$ для всех $x \geq 0$. Тогда радиально-продольное распределение Ψ можно найти через интеграл

$$\Psi(r, x, \text{Re}) = \int_0^x d\Psi = \int_0^r u_x r dr.$$

Интегрируя с учетом записанного распределения u_x , находим

$$\begin{aligned} \Psi(r, x, \text{Re}) = & r^2 \left(1 - \frac{r^2}{2} \right) - 2r \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^2} \left[r - \frac{2J_1(\lambda_i r)}{\lambda_i J_0(\lambda_i)} \right] \exp \left(-\lambda_i^2 \frac{x}{\text{Re}} \right) + \\ & + r \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G_n}{\lambda_n^2} \left[r + \frac{rJ_0(\lambda_n \sqrt{2})}{J_2(\lambda_n \sqrt{2})} - \frac{\sqrt{2}J_1(\lambda_n \sqrt{2}r)}{\lambda_n J_2(\lambda_n \sqrt{2})} \right] \exp \left(-\lambda_n^2 \frac{x}{\text{Re}} \right) \sum_{k=1}^{\infty} G_k \exp \left(-\lambda_k^2 \frac{x}{\text{Re}} \right) - \right. \\ & - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G_n J_1(\lambda_n r)}{\lambda_n J_0(\lambda_n)} \exp \left(-\lambda_n^2 \frac{x}{\text{Re}} \right) \left[\sum_{k=1}^{n-1} \frac{G_k J_0(\lambda_k r)}{(\lambda_n^2 - \lambda_k^2) J_0(\lambda_k)} \exp \left(-\lambda_k^2 \frac{x}{\text{Re}} \right) + \right. \\ & + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{G_k J_0(\lambda_k r)}{(\lambda_n^2 - \lambda_k^2) J_0(\lambda_k)} \exp \left(-\lambda_k^2 \frac{x}{\text{Re}} \right) \left. \right] + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G_n J_0(\lambda_n r)}{\lambda_n^2 J_0(\lambda_n)} \exp \left(-\lambda_n^2 \frac{x}{\text{Re}} \right) \times \\ & \times \left[\sum_{k=1}^{n-1} \frac{G_k \lambda_k J_1(\lambda_k r)}{(\lambda_n^2 - \lambda_k^2) J_0(\lambda_k)} \exp \left(-\lambda_k^2 \frac{x}{\text{Re}} \right) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{G_k \lambda_k J_1(\lambda_k r)}{(\lambda_n^2 - \lambda_k^2) J_0(\lambda_k)} \exp \left(-\lambda_k^2 \frac{x}{\text{Re}} \right) \right] - \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G_n^2}{\lambda_n^2} \left[\frac{rJ_0^2(\lambda_n r) + rJ_1^2(\lambda_n r)}{J_0^2(\lambda_n)} + \frac{rJ_0(\lambda_n \sqrt{2})}{J_2(\lambda_n \sqrt{2})} - \frac{\sqrt{2}J_1(\lambda_n \sqrt{2}r)}{\lambda_n J_2(\lambda_n \sqrt{2})} \right] \exp \left(-2\lambda_n^2 \frac{x}{\text{Re}} \right) \Bigg\}. \end{aligned}$$

Расчетные поля линий тока исследуемых контрвихревых течений при $\text{Re} = 450$ показаны на рис. 3 на участке камеры смешения длиной двадцать ее радиусов. При двухслойном контрвихревом течении область рециркуляционного движения существенно более растянута вдоль трубы с точкой торможения на расстоянии 15,5R от начала активной зоны, чем в четырехслойном течении, где точка торможения расположена на расстоянии 8R, однако, четырехслойное течение существенно более развито в радиальном направлении, чем двухслойное. Так, четырехслойная рециркуляционная зона занимает около 97 % площади сечения трубы, оставляя транзитному потоку оставшиеся 3 % ее площади.

Рассмотрим последнюю кинематическую характеристику — вихревую структуру контрвихревых течений. В условиях принятых допущений, используя распределения (4) и (5), для компонент вихревой структуры течений находим

Рис. 2. Распределение азимутальных, аксиальных и радиальных скоростей в контрвращевых течениях: вверху — режим 1, внизу — режим 2

Fig. 2. Distributions of azimuthal, axial and radial velocities in flows with coaxial oppositely-rotation layers: above — mode 1, below — mode 2

Рис. 3. Линии тока: a — в двухслойном контрвихревом течении; b — в четырехслойном контрвихревом течении

Fig. 3. Current lines in flow with coaxial oppositely-rotation: a — two layers; b — four layers

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}_r U &= -\frac{\partial u_0}{\partial x} = \frac{2}{\operatorname{Re}} \sum_{n=1}^{\infty} G_n \frac{\lambda_n J_1(\lambda_n r)}{J_0(\lambda_n)} \exp\left(-\lambda_n^2 \frac{x}{\operatorname{Re}}\right), \\
\operatorname{rot}_0 U &= -\frac{\partial u_x}{\partial r} = 4r + 4 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(\lambda_i r)}{\lambda_i J_0(\lambda_i)} \exp\left(-\lambda_i^2 \frac{x}{\operatorname{Re}}\right) - \\
&\quad - 2 \left[\sum_{n=1}^{\infty} G_n \frac{\sqrt{2} J_1(\lambda_n \sqrt{2} r)}{\lambda_n J_2(\lambda_n \sqrt{2})} \exp\left(-\lambda_n^2 \frac{x}{\operatorname{Re}}\right) \sum_{k=1}^{\infty} G_k \exp\left(-\lambda_k^2 \frac{x}{\operatorname{Re}}\right) + \right. \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} G_n \frac{J_1(\lambda_n r)}{\lambda_n J_0(\lambda_n)} \exp\left(-\lambda_n^2 \frac{x}{\operatorname{Re}}\right) \sum_{k=1}^{\infty} G_k \frac{J_0(\lambda_k r)}{J_0(\lambda_k)} \exp\left(-\lambda_k^2 \frac{x}{\operatorname{Re}}\right) + \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} G_n \frac{J_0(\lambda_n r)}{\lambda_n^2 J_0(\lambda_n)} \exp\left(-\lambda_n^2 \frac{x}{\operatorname{Re}}\right) \sum_{k=1}^{\infty} G_k \frac{\lambda_k J_1(\lambda_k r)}{J_0(\lambda_k)} \exp\left(-\lambda_k^2 \frac{x}{\operatorname{Re}}\right) - \\
&\quad \left. - \sum_{n=1}^{\infty} G_n^2 \frac{\sqrt{2} J_1(\lambda_n \sqrt{2} r)}{\lambda_n J_2(\lambda_n \sqrt{2})} \exp\left(-2\lambda_n^2 \frac{x}{\operatorname{Re}}\right) \right], \\
\operatorname{rot}_x U &= \frac{\partial(r u_0)}{r \partial r} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} G_n \frac{J_0(\lambda_n r)}{J_0(\lambda_n)} \exp\left(-\lambda_n^2 \frac{x}{\operatorname{Re}}\right), \\
\operatorname{rot}_x U &= \frac{\partial(r u_0)}{r \partial r} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} G_n \frac{J_0(\lambda_n r)}{J_0(\lambda_n)} \exp\left(-\lambda_n^2 \frac{x}{\operatorname{Re}}\right).
\end{aligned}$$

Изометрические изображения вихревых полей в активной зоне исследуемых контрвихревых течений показаны на рис. 4 и 5. Так как течения симметричны относительно оси трубы на рисунках радиальный диапазон принят от 0 до $r/R = 1$. Расчеты выполнены при числах Рейнольдса, равных $\operatorname{Re} = 450$, и включают зону, на которой наблюдаются контрвихревые течения. Для того чтобы представить вихревую структуру контрвихревых течений следует обратиться к рис. 1, *b*.

Анализ показывает, что мощные вихревые поля формируются исключительно во внутренних слоях контрвихревых течений. Это важное обстоятельство говорит о том, что именно внутренние слои контрвихревых течений безвозвратно теряют подавляющую часть своей первоначальной механической энергии, трансформируя ее в тепло. Следовательно, структура контрвихревых течений формируется под воздействием внутренних процессов, обусловленных силами вязкости, что резко отличает контрвихревые течения от циркуляционных и осевых.

Все характеристики контрвихревых течений описываются распределениями в виде рядов Фурье – Бесселя

$$f(r, z, \operatorname{Re}) = \operatorname{Re}^b \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_m(\lambda_n r) \exp\left(-\lambda_n^2 \frac{x}{\operatorname{Re}}\right),$$

либо в виде произведений рядов Фурье – Бесселя

$$f(r, z, \operatorname{Re}) = \operatorname{Re}^b \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_m(\lambda_n r) \exp\left(-\lambda_n^2 \frac{x}{\operatorname{Re}}\right) \sum_{k=1}^{\infty} C_k J_m(\lambda_k r) \exp\left(-\lambda_k^2 \frac{x}{\operatorname{Re}}\right),$$

где b — показатель степени ($b = 0, -1$); λ_n и λ_k — действительные нули функции Бесселя первого рода m -го порядка ($J_m(\lambda_n) = 0$, $J_m(\lambda_k) = 0$); C_n , C_k — постоянные интегрирования.

Следовательно, увеличение числа Рейнольдса при $b = 0$ приводит к «растяжке» процесса изменения профиля произвольной характеристики течения по аксиальной координате, т.е. к «сносу» профиля вниз по течению на пропорциональное расстояние; при $b = -1$ «снос» профиля сопровождается пропорциональным снижением его масштаба.

Исследование динамики течений включает также описание тензора вязких напряжений и зон локальной устойчивости. Эти характеристики мы надеемся рассмотреть в следующей статье.

Рис. 4. Вихревые поля в двухслойном контрвихревом течении: *a* — радиальный вихрь; *b* — азимутальный вихрь; *c* — продольный вихрь

Fig. 4. Vorticity fields in flow with coaxial oppositely-rotation two layers: *a* — radial vortex; *b* — azimuth vortex; *c* — longitudinal vortex

Рис. 5. Вихревые поля в четырехслойном контрвихревом течении: *a* — радиальный вихрь; *b* — азимутальный вихрь; *c* — продольный вихрь

Fig. 5. Vorticity fields in flow with coaxial oppositely-rotation four layers: *a* — radial vortex; *b* — azimuth vortex; *c* — longitudinal vortex

ВЫВОДЫ

1. Течения жидкостей, в которых коаксиальные слои вращаются в противоположных направлениях, исследовались методами физического и численного моделирования. В статье выполнен анализ динамики этих течений методами теоретической гидромеханики.

2. В основе теоретической модели исследуемого течения лежат уравнения Навье – Стокса и метод разложения дифференциальных уравнений Фурье. В результате получены расчетные формулы радиально-аксиальных распределений тангенциальных, аксиальных и радиальных скоростей в этих течениях, а также функции тока и компонент вязких вихрей.

3. Анализ показывает, что, судя по распределениям тангенциальных скоростей, контрвихревые течения в пределах активной зоны (зоны интенсивного вязкого взаимодействия коаксиальных противоположно закрученных слоев) трансформируются в продольно-осевые течения без закрутки. Длина активной зоны при ламинарном двухслойном течении равна 40 радиусам трубы, при четырехслойном — 20 радиусам, т.е. пропорционально меньше.

4. Значения радиальных скоростей на один-два порядка ниже азимутальных и аксиальных. Причем радиальные скорости будут тем ниже, чем меньше вязкость жидкости.

5. В контрвихревом ламинарном течении формируется примыкающая к оси трубы рециркуляци-

онная зона. Протяженность этой зоны колеблется от 8 до 16 радиусов трубы.

6. Исследования показали, что исключительно во внутренних слоях контрвихревых течений формируются мощные вихревые поля. Это важное обстоятельство говорит о том, что именно внутренние слои контрвихревых течений безвозвратно теряют подавляющую часть своей первоначальной механической энергии, трансформируя ее в тепло. Следовательно, структура контрвихревых течений формируется под воздействием внутренних процессов, обусловленных силами вязкости, что резко отличает контрвихревые течения от циркуляционных и осевых.

7. Поскольку все структурные характеристики контрвихревых течений описываются распределениями в виде рядов или произведений рядов Фурье – Бесселя, включающих число Рейнольдса в экспоненте $\exp(-\lambda^2 x / \text{Re})$ и затем умноженных на число Рейнольдса в степени $b = 0$ или $b = -1$, то увеличение числа Рейнольдса при $b = 0$ приводит к «растяжке» процесса изменения профиля произвольной характеристики течения по аксиальной координате, т.е. к «сносу» профиля вниз по течению на пропорциональное расстояние; при $b = -1$ «снос» профиля сопровождается пропорциональным снижением его масштаба.

8. В дальнейших исследованиях предполагается выполнить анализ тензора вязких напряжений и зон локальной устойчивости контрвихревых течений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кривченко Г.И., Мордасов А.П., Квятковская Е.В., Волианик В.В., Зуйков А.Л. Высоконапорная водосбросная система с контрвихревым гасителем энергии потока воды // Гидротехническое строительство. 1981. № 10. С. 29–31.

2. Карелин В.Я., Кривченко Г.И., Мордасов А.П., Волианик В.В., Зуйков А.Л., Ахметов В.К. Физическое и математическое моделирование систем гашения энергии в вихревых водосбросах // Физическое и математическое моделирование гидравлических процессов при исследовании крупных гидроузлов комплексного назначения «МГ–89»: тез. науч.-техн. совещания в г. Дивногорск в 1989 г. Л.: Изд-во ВНИИГ им. Б.Е. Веденеева, 1989. С. 11–12.

3. Белоусов А.С., Сажин Б.С., Сажин В.Б., Лопачов А.В., Любимкин А.В. Гидродинамика течений плотной фазы в аппарате с коаксиальными закрученными потоками // Успехи в химии и в химической технологии. 2012. Т. 26. № 1 (130). С. 131–134.

4. Белоусов А.С., Сажин Б.С., Лопачов А.В., Сажина М.Б., Мокрышев С.С., Фитцева Н.А. и др. Модель гидродинамических течений в аппаратах с

коаксиальными закрученными потоками // Успехи в химии и в химической технологии. 2011. Т. 25. № 10 (126). С. 110–113.

5. Волианик В.В., Зуйков А.Л., Куприянов В.П., Новикова И.С., Родионов В.Б., Ханов Н.В. и др. Особенности движения воздухомытого потока воды в высоконапорных вихревых водосбросах // Безопасность энергетических сооружений: науч.-техн. и производственный сб. / науч. ред. И.В. Семенов. М.: НИИЭС, 2010. Вып. 17. С. 236–251.

6. Волианик В.В., Зуйков А.Л., Орехов Г.В., Баяраа У. Течение в камере смешения контрвихревого аэратора // Экология урбанизированных территорий. 2015. № 7. С. 23–28.

7. Волианик В.В., Орехов Г.В. Области применения взаимодействующих закрученных потоков жидкостей и газов // Вестник МГСУ. 2015. № 7. С. 87–104. DOI: 10.22227/1997-0935.2015.7.87-104

8. Орехов Г.В. Контрвихревые течения и их использование на практике // Интернет-журнал «Наукоеведение». 2017. Т. 9. № 3. Ст. 14. URL: <http://naukovedenie.ru/PDF/21TVN317.pdf>

9. Guo J., Yan Y., Lui W., Jiang F., Fan A. Enhancement of laminar convective heat transfer relying on excitation of transverse secondary swirl flow // *International Journal of Thermal Sciences*. 2015. Vol. 87. Pp. 199–206. DOI: 10.1016/j.ijthermalsci.2014.08.023
10. Hanada T., Sawamoto T., Takahashi K. In-line mixing for high reactive species using swirl flow ejector // *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*. 2016. Vol. 50. Issue 6. Pp. 932–936. DOI: 10.1134/s0040579516060063
11. Kravtsov Z.D., Sharaborin D.K., Dulin V.M. Swirl effect on flow structure and mixing in a turbulent jet // *Journal of Physics: Conference Series*. 2018. Vol. 980. P. 012001. DOI: 10.1088/1742-6596/980/1/012001
12. Parra T., Perez R., Lorenzo G., Szasz R., Gutkowski A., Castro F. Diffuser influence on the mixing of coaxial swirling jet // *ASME FEDSM2014-21354*. 2014. DOI: 10.1115/FEDSM2014-21354
13. Parra-Santos T., Vuorinen V., Perez R., Szasz R., Castro F. Aerodynamic characterization of isothermal swirling flows in combustors // *International Journal of Energy and Environmental Engineering*. 2014. Vol. 5. Issue 2. Pp. 1–6. DOI: 10.1007/s40095-014-0085-5
14. Parra-Santos T. et al. Swirl influence on mixing and reactive flows // *ASME 2016 Fluids Engineering Division Summer Meeting collocated with the ASME 2016 Heat Transfer Summer Conference and the ASME 2016 14th International Conference on Nanochannels, Microchannels, and Minichannels*. American Society of Mechanical Engineers. 2016. Pp. V01BT24A001.
15. Javadi A., Bosioc A., Nilsson H., Muntean S., Susan-Resiga R. Experimental and numerical investigation of the precessing helical vortex in a conical diffuser, with rotor–stator interaction // *Journal of Fluids Engineering*. 2016. Vol. 138. Issue 8. P. 081106. DOI: 10.1115/1.4033416
16. Javadi A., Nilsson H. Active flow control of the vortex rope and pressure pulsations in a swirl generator // *Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics*. 2017. Vol. 11. No. 1. Pp. 30–41. DOI: 10.1080/19942060.2016.1235515
17. Розанова Н.Н. К вопросу моделирования закрученных потоков в вихревых водосбросных сооружениях // *Природообустройство*. 2013. № 4. С. 50–52.
18. Орехов Г.В. Моделирование контрвихревых систем. Масштабная серия исследований // Интернет-журнал «Науковедение». 2013. № 4 (17). Ст. 53. URL: <https://naukovedenie.ru/PDF/54tvn413.pdf>
19. Abricka M., Barmina I., Valdmans R., Zake M. Experimental and numerical study of swirling flows and flame dynamics // *Latvian Journal of Physics and Technical Sciences*. 2014. Vol. 51. Issue 4. Pp. 25–40. DOI: 10.2478/lpts-2014-0021
20. Churin P., Kapustin S., Orekhov G., Poddaeva O. Experimental studies of counter vortex flows modeling // *Applied Mechanics and Materials*. 2015. Vol. 756. Pp. 331–335. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMM.756.331
21. Gan L., Baqui Y.B., Maffoli A. An experimental investigation of forced steady rotating turbulence // *European Journal of Mechanics — B/Fluids*. 2016. Vol. 58. Pp. 59–69. DOI: 10.1016/j.euromechflu.2016.03.005
22. Ахметов В.К., Волианик В.В., Зуйков А.Л., Орехов Г.В. Физическое моделирование контрвихревых сооружений и оборудования / под ред. Г.В. Орехова. М.: Изд-во МИСИ-МГСУ, 2018. 373 с.
23. Nan Gui. Numerical study of vortex evolution and correlation between twin swirling flows // *Advanced Materials Research*. 2012. Vol. 516–517. Pp. 976–979. DOI: 10.4028/www.scientific.net/amr.516-517.976
24. Zhu Z., Niu J., Li Y. Swirling-strength based large eddy simulation of turbulent flow around single square cylinder at low Reynolds numbers // *Applied Mathematics and Mechanics*. 2014. Vol. 35. Issue 8. Pp. 959–978. DOI: 10.1007/s10483-014-1847-7
25. Parra T., Peres R., Rodriguez M.A., Castro F., Szasz R.Z., Gutkowski A. Numerical simulation of swirling flows — heat transfer enhancement // *Journal of Fluid Flow, Heat and Mass Transfer*. 2015. Vol. 2. DOI: 10.11159/jffhmt.2015.001
26. Parra T., Peres J.R., Szasz R., Rodriguez M.A., Castro F. Numerical modelling of flow pattern for high swirling flows // *EPJ Web of Conferences*. 2015. Vol. 92. P. 02059. DOI: 10.1051/epjconf/20159202059
27. Yusupov R., Shtork S., Alekseenko S. Isothermal modeling of aerodynamic structure of the swirling flow in a two-stage burner // *EPJ Web of Conferences*. 2017. Vol. 159. P. 00052. DOI: 10.1051/epjconf/201715900052
28. Ахметов В.К., Ахметова В.В. Математическое моделирование гидродинамики и устойчивости соосно вращающихся потоков // *Международный журнал вычислительного гражданского и структурного проектирования*. 2016. Т. 12. № 3. С. 9–13.
29. Ахметов В.К. Гидродинамическая устойчивость контрвихревых течений // *Гидротехническое строительство*. 2018. № 2. С. 13–18.
30. Ахметов В.К., Волианик В.В., Зуйков А.Л., Орехов Г.В. Моделирование и расчет контрвихревых течений / под ред. А.Л. Зуйкова. М.: Изд-во МГСУ, 2012. 252 с.
31. Зуйков А.Л., Орехов Г.В., Волианик В.В. Распределение азимутальных скоростей в ламинарном контрвихревом течении // *Вестник МГСУ*. 2013. № 5. С. 150–161. DOI: 10.22227/1997-0935.2013.5.150-161
32. Зуйков А.Л. Распределение продольных скоростей в ламинарном течении с противоположно вращающимися коаксиальными слоями // *Вестник МГСУ*. 2017. Т. 12. Вып. 9 (108). С. 1027–1038. DOI: 10.22227/1997-0935.2017.9.1027-1038

33. Зуйков А.Л., Суцупин В.А., Жажжа Е.Ю. Совершенствование математической модели ламинарного контрвихревого течения // Вестник МГСУ. 2018. Т. 13. Вып. 3 (114). С. 400–412. DOI: 10.22227/1997-0935.2018.3.400-412

34. Zyikov A., Orekhov G., Suehtina T. Structure of laminar flows with oppositely-rotating coaxial layers // MATEC Web of Conferences. 2018. Vol. 193. P. 02024. DOI: 10.1051/mateconf/201819302024

35. Зуйков А.Л. Гидродинамика циркуляционных течений. М. : Изд-во АСВ, 2010. 216 с.

36. Batchelor G.K. Axial flow in trailing line vortices // Journal of Fluid Mechanics. 1964. Vol. 20. No. 4. P. 645. DOI: 10.1017/s0022112064001446

37. Korn G.A., Korn T.M. Mathematical handbook for scientists and engineers : definitions, Theorems and Formulas for Reference and Review. General Publishing Company, 2000. 1151 p.

Поступила в редакцию 17 декабря 2018 г.

Принята в доработанном виде 2 февраля 2019 г.

Одобрена для публикации 28 февраля 2019 г.

ОБ АВТОРЕ: Зуйков Андрей Львович — доктор технических наук, профессор кафедры гидравлики, Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ), 125319, г. Москва, Ленинградский пр-т, д. 64; профессор кафедры гидравлики и гидротехнического строительства, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ), 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, zuykov54@mail.ru.

REFERENCES

1. Krivchenko G.I., Mordasov A.P., Kvyatkovskaya E.V., Volshanik V.V., Zuikov A.L. High-head spillway system with counter-rotating energy dissipator. *Hydro-technical Construction*. 1981; 10:29-31. (rus.).

2. Karelin V.Ya., Krivchenko G.I., Mordasov A.P., Volshanik V.V., Zuikov A.L., Akhmetov V.K. Physical and mathematical modeling of systems of energy dissipation in vortex spillways. *Physical and Mathematical Modeling of Hydraulic Processes in the Study of Large-Scale Multi-Purpose Hydro "MH-89" : abstracts of Scientific and Technical Conference in Divnogorsk in 1989*. Leningrad, B.E. Vedenev VNIIG Publ., 1989; 11-12. (rus.).

3. Belousov A.S., Sazhin B.S., Sazhin V.B., Lopakov A.V., Ljubimkin A.V. Hydrodynamics dense phase currents in devices with coaxial swirling flow. *Advances in Chemistry and Chemical Engineering*. 2011; 26:1(130):131-134. (rus.).

4. Belousov A.S., Sazhin B.S., Lopakov A.V., Sazhina M.B., Mokryshev S.S., Fitceva N.A. et al. Model of hydrodynamic flows in devices with coaxial swirling flow. *Advances in Chemistry and Chemical Engineering*. 2011; 25:10(126):110-113. (rus.).

5. Volshanik V.V., Zuikov A.L., Kupriianov V.P., Novikova I.S., Rodionov V.B., Khanov N.V. et al. Features of the movement of air-saturated water flow in high-pressure vortex spillways. *Safety of energy facilities : Scientific, technical and industrial collection*. Scientific editor I.V. Semenov. 2010; 17:236-251. (rus.).

6. Volshanik V.V., Zuikov A.L., Orekhov G.V., Baiaraa U. Flow in mixing chamber of countervortex aerator. *Ecology of urban areas*. 2015; 7:23-28. (rus.).

7. Volshanik V.V., Orekhov G.V. Areas of use of interacting swirl liquid and gas flows. *Vestnik MGSU [Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering]*. 2015; 7:87-104. DOI: 10.22227/1997-0935.2015.7.87-104 (rus.).

8. Orekhov G.V. Counter-rotating currents and their use in practice. *Online Journal of Science*. 2017; 9(3):14. URL: <http://naukovedenie.ru/PDF/21TVN317.pdf> (rus.).

9. Guo J., Yan Y., Lui W., Jiang F., Fan A. Enhancement of laminar convective heat transfer relying on excitation of transverse secondary swirl flow. *International Journal of Thermal Sciences*. 2015; 87:199-206. DOI: 10.1016/j.ijthermalsci.2014.08.023

10. Hanada T., Sawamoto T., Takahashi K. In-line mixing for high reactive species using swirl flow ejector. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*. 2016; 50(6):932-936. DOI: 10.1134/s0040579516060063

11. Kravtsov Z.D., Sharaborin D.K., Dulin V.M. Swirl effect on flow structure and mixing in a turbulent jet. *Journal of Physics: Conference Series*. 2018; 980:012001. DOI: 10.1088/1742-6596/980/1/012001

12. Parra T., Perez R., Lorenzo G., Szasz R., Gutkowski A., Castro F. Diffuser influence on the mixing of coaxial swirling jet. *ASME FEDSM2014-21354*. 2014. DOI: 10.1115/FEDSM2014-21354

13. Parra T., Vuorinen V., Perez R., Szasz R., Castro F. Aerodynamic characterization of isothermal swirling flows in combustors. *International Journal of Energy and Environmental Engineering*. 2014; 5(2):1-6. DOI: 10.1007/s40095-014-0085-5

14. Parra-Santos T. et al. Swirl influence on mixing and reactive flows. *ASME 2016 Fluids Engineering Division Summer Meeting collocated with the ASME 2016 Heat Transfer Summer Conference and the ASME 2016 14th International Conference on Nanochannels, Microchannels, and Minichannels. American Society of Mechanical Engineers*. 2016; V01BT24A001.
15. Javadi A., Bosioc A., Nilsson H., Muntean S., Susan-Resiga R. Experimental and numerical investigation of the precessing helical vortex in a conical diffuser, with rotor–stator interaction. *Journal of Fluids Engineering*. 2016; 138(8):081106. DOI: 10.1115/1.4033416
16. Javadi A., Nilsson H. Active flow control of the vortex rope and pressure pulsations in a swirl generator. *Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics*. 2017; 11(1):30–41. DOI: 10.1080/19942060.2016.1235515
17. Rozanova N.N. Regarding the question of swirling flows simulation in vortex spillway structures. *Environmental Engineering*. 2013; 4:50–52. (rus.).
18. Orekhov G.V. Modeling counter vortex systems. Large-scale series of studies. *Online Journal of Science*. 2013; 3(17):52. URL: <https://naukovedenie.ru/PDF/54tvn413.pdf> (rus.).
19. Abricka M., Barmina I., Valdmanis R., Zake M. Experimental and numerical study of swirling flows and flame dynamics. *Latvian Journal of Physics and Technical Sciences*. 2014; 51(4):25–40. DOI: 10.2478/lpts-2014-0021
20. Churin P., Kapustin S., Orekhov G., Poddaeva O. Experimental studies of counter vortex flows modeling. *Applied Mechanics and Materials*. 2015; 756:331–335. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMM.756.331
21. Gan L., Baqui Y.B., Maffoli A. An experimental investigation of forced steady rotating turbulence. *European Journal of Mechanics — B/Fluids*. 2016; 58:59–69. DOI: 10.1016/j.euromechflu.2016.03.005
22. Akhmetov V.K., Volshanik V.V., Zuikov A.L., Orekhov G.V. *Physical modeling of anti-vortex structures and equipment* / by ed. G.V. Orekhov. Moscow, Publishing house MISI-MGSU., 2018; 373. (rus.).
23. Nan Gui. numerical study of vortex evolution and correlation between twin swirling flows. *Advanced Materials Research*. 2012; 516–517:976–979. DOI: 10.4028/www.scientific.net/amr.516-517.976
24. Zhu Z., Niu J., Li Y. Swirling-strength based large eddy simulation of turbulent flow around single square cylinder at low Reynolds numbers. *Applied Mathematics and Mechanics*. 2014; 35(8):959–978. DOI: 10.1007/s10483-014-1847-7
25. Parra T., Peres R., Rodriguez M.A., Castro F., Szasz R.Z., Gutkowski A. Numerical simulation of swirling flows — heat Transfer Enhancement. *Journal of Fluid Flow, Heat and Mass Transfer*. 2015; 2. DOI: 10.11159/jffhmt.2015.001
26. Parra T., Peres J.R., Szasz R., Rodriguez M.A., Castro F. Numerical modelling of flow pattern for high swirling flows. *EPJ Web of Conferences*. 2015; 92:02059. DOI: 10.1051/epjconf/20159202059
27. Yusupov R., Shtork S., Alekseenko S. Isothermal modeling of aerodynamic structure of the swirling flow in a two-stage burner. *EPJ Web of Conferences*. 2017; 159:00052. DOI: 10.1051/epjconf/201715900052
28. Akhmetov V.K., Akhmetova V.V. Mathematical modeling of hydrodynamics and stability of coaxially rotating flows. *International Journal of Computational Civil and Structural Engineering*. 2016; 12(3):9–13. (rus.).
29. Akhmetov V.K. Hydrodynamic stability of the counter-vortex flows. *Hydraulic engineering*. 2018; 2:13–18. (rus.).
30. Akhmetov V.K., Volshanik V.V., Zuikov A.L., Orekhov G.V. *Simulation and calculation of counter-rotating flows*. Edited by A.L. Zuikov. Moscow, Moscow State University of Civil Engineering Publ., 2012; 252. (rus.).
31. Zuikov A.L., Orekhov G.V., Volshanik V.V. Distribution of azimuthal velocities in a laminar counter-rotating coaxial layers. *Vestnik MGSU* [Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering]. 2013; 5:150–161. DOI: 10.22227/1997-0935.2013.5.150-161 (rus.).
32. Zuikov A.L. Distribution of longitudinal velocities in a laminar flow with oppositely rotating coaxial layers. *Vestnik MGSU* [Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering]. 2017; 12:9(108):1027–1038. DOI: 10.22227/1997-0935.2017.9.1027-1038 (rus.).
33. Zuikov A.L., Sucepin V.A., Zhazha E.Ju. Improvement of the mathematical model of laminar flow with oppositely-rotation coaxial layers. *Vestnik MGSU* [Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering]. 2018; 13:3(114):400–412. DOI: 10.22227/1997-0935.2018.3.400-412 (rus.).
34. Zyikov A., Orekhov G., Suehtina T. Structure of laminar flows with oppositely-rotating coaxial layers. *MATEC Web of Conferences*. 2018; 193:02024. DOI: 10.1051/mateconf/201819302024
35. Zuikov A.L. *Hydrodynamics of circulating currents*. Moscow, Publisher Association of Building Institutions of Higher Education, 2010; 216. (rus.).
36. Batchelor G.K. Axial flow in trailing line vortices. *Journal of Fluid Mechanics*. 1964; 20(4):645. DOI: 10.1017/s0022112064001446
37. Korn G.A., Korn T.M. *Mathematical handbook for scientists and engineers: definitions, theorems and formulas for reference and review*. General Publishing Company, 2000; 1151.

Received December 17, 2018.

Adopted in a modified form on February 2, 2019.

Approved for publication February 28, 2019.

ABOUT THE AUTHOR: **Andrey L. Zuikov** — Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Hydraulics, **Moscow Automobile and Road Construction State Technical University (MADI)**, 64 Leningradsky prospect, Moscow, 125319, Russian Federation; Professor of the Department of Hydraulics and Hydraulic Engineering, **Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (MGSU)**, 26 Yaroslavskoe shosse, Moscow, 129337, Russian Federation, zuykov54@mail.ru.