ПРОЕКТИРОВАНИЕ И КОНСТРУИРОВАНИЕ СТРОИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ. СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА. ОСНОВАНИЯ И ФУНДАМЕНТЫ, ПОДЗЕМНЫЕ СООРУЖЕНИЯ

УДК 519.62:531:534.11:539.3/.6

DOI: 10.22227/1997-0935.2019.4.427-434

Реологические модели одномерных осцилляторов с памятью формы

А. Збичак, К. Василевский

Варшавский политехнический университет (ВПИ), 00-637, г. Варшава, пр. Народной Армии, д. 16

АННОТАЦИЯ

Введение. В настоящее время наблюдается повышение интереса к применению в гражданском строительстве изделий, включающих элементы из материалов с памятью формы. Использование подобных изделий и конструкций в сейсмостойком строительстве способствует смягчению последствий таких стихийных бедствий, как землетрясения. Положительные эффекты влияния материалов с памятью формы обусловлены как их способностью к обратимой деформации при нагреве, так и псевдоупругостью, проявляющейся восстановлением деформаций при снятии нагрузки. Наиболее распространенным подходом к получению уравнений состояния материалов с памятью формы является термомеханическое моделирование, однако в рамках этого подхода уравнения состояния зависят от внутренних переменных.

Материалы и методы. Для моделирования осцилляторов с одной степенью свободы и памятью формы использован феноменологический подход, основанный на анализе реологических схем — последовательно-параллельных соединений ограниченного числа базовых элементов.

Результаты. Выбран ряд базовых реологических моделей, комбинирование которых позволяет адекватно представить поведение элементов с эффектом памяти формы. Предложен ряд усложняющихся реологических моделей, последовательно показывающих характерные особенности петли гистерезиса псевдоупругости. Рассмотрено влияние параметров моделей на колебательные характеристики. Выполнено численное исследование вынужденных колебаний балки как осциллятора с одной степенью свободы, армированного элементами с памятью формы.

Выводы. В результате численного эксперимента показана адекватность предложенного феноменологического подхода к моделированию элементов с эффектом памяти формы. Преимуществом подхода является возможность явной записи уравнений состояния в виде системы дифференциальных уравнений, которая может быть алгоритмически реализована в многочисленных программных пакетах численной математики и(или) конечно-элементного анализа.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: эффект памяти формы, одномерный осциллятор, реологические модели, численный анализ, сейсмостойкое строительство

ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ: Збичак А., Василевский К. Реологические модели одномерных осцилляторов с памятью формы // Вестник МГСУ. 2019. Т. 14. Вып. 4. С. 427–434. DOI: 10.22227/1997-0935.2019.4.427-434

Modelling of single degree of freedom SMA oscillators by using rheological schemes

Artur Zbiciak, Kacper Wasilewski

Warsaw University of Technology (WUT), 16 Armii Ludowej avenue, Warsaw, 00-637, Poland

ABSTRACT

Introduction. The interest to the SMA elements in civil engineering is constantly increasing. Regarding the field of civil engineering, the devices incorporating SMA elements mostly find applications in mitigation of natural disaster hazards, such as earthquakes. The promising results of applications are possible due to unique properties of SMA, such as shape memory effect (recovering of relatively high strains while material is heated) and superelasticity (recovering of strains upon load removal). The most common approach to the formulation of SMAs constitutive relations is a thermomechanical modelling, in which constitutive equations are dependent on internal state variables.

Materials and methods. The article describes the phenomenological approach to modelling of single degree of freedom SMA oscillators by using rheological schemes.

Results. Certain sets of rheological components are presented and their influence on the oscillator response is examined. As an example of numerical application of presented approach, the simple one-dimensional oscillator is used in order to solve the case of forced vibrations of a cantilever with embedded SMA reinforcement.

Conclusions. One of the advantages of the phenomenological modelling approach presented in the article is a possibility of formulation of constitutive relationships as a set of explicit differential equations. Such system of equations can be easily implemented in mathematical software or in the commercial FEM codes as a user's subroutines.

KEYWORDS: shape memory effect, one-dimensional oscillator, rheological schemes, numerical modelling, earthquake-resistant construction

FOR CITATION: Zbiciak A., Wasilewski K. Modelling of single degree of freedom SMA oscillators by using rheological schemes. *Vestnik MGSU* [Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering]. 2019; 14:4:427-434. DOI: 10.22227/1997-0935.2019.4.427-434 (rus.).

ВВЕДЕНИЕ

Основные области применения материалов с эффектом памяти формы (ЭПФ) в строительной отрасли связаны со смягчением последствий стихийных бедствий, обусловленных значительными горизонтальными передвижениями земной поверхности при землетрясениях. В частности, используются многослойные изолирующие элементы с эластомерным основанием [1–3], крепления с ЭПФ-узлами [4, 5] и включение элементов с ЭПФ в качестве конструктивных узлов [6, 7]. Положительный эффект влияния материалов с ЭПФ объясняется как их способностью к обратимой деформации при нагреве, так и сверхэластичностью, проявляющейся восстановлением деформаций при снятии нагрузки [8].

Характеристики материалов с ЭПФ определяются спецификой фазовых переходов, вызванных нагревом (собственно ЭПФ) или механическим напряжением в изотермических условиях при температуре выше критической A_f .

На рис. 1 приводится петля гистерезиса псевдоупругости при испытании на внеосевое нагруже-

ние [9]. В момент начала нагружения образец находится в аустенитной фазе. Нагружение вызывает обратимое мартенситное превращение без упругого двойникования. Обусловленный нагружением фазовый переход соответствует верхней ветви петли гистерезиса, при движении вдоль которой накапливается количество термодинамически неустойчивой мартенситной фазы. Нижняя ветвь соответствует процессам, происходящим при снятии нагрузки — обратному фазовому переходу мартенсита в аустенит, сопровождающемуся снижением деформации до нулевого значения [10, 11].

С точки зрения преимуществ использования материалов и конструкций с ЭПФ в строительной отрасли, эффект псевдоупругости представляет наибольший интерес. В то же время получение адекватных уравнений состояния с целью их дальнейшего использования при проектировании конструкций с псевдоупругими элементами представляет наибольшую сложность.

В настоящей работе раскрывается подход к моделированию колебательных систем (осцилляторов) с ЭПФ с использованием реологических схем. Авторами выполнен анализ ряда реологических моделей

Рис. 1. Петля гистерезиса на диаграмме нагрузка – деформация [9]

Fig. 1. Results of uniaxial tension test of SMA and its numerical simplification [9]

и рассмотрено влияние их параметров на колебательные характеристики. В качестве примера использования представленного подхода рассматривается численное исследование вынужденных колебаний балки как осциллятора с одной степенью свободы.

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

При исследовании одномерных осцилляторов с памятью формы в ряде работ [11–13] авторы использовали термомеханический подход к выводу уравнений состояния материалов с ЭПФ. В рамках этого подхода уравнения состояния определяются внутренними структурными характеристиками, в частности — объемной долей ξ мартенситной фазы и деформацией ε' , соответствующей фазовому переходу.

Настоящая работа является продолжением трудов [14–19]. Полученные модели материалов с ЭПФ основаны на анализе многокомпонентных (составных) реологических моделей (СРМ), включающих различные элементы.

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Базовые элементы реологических моделей

Осциллятор с ЭПФ схематично представлен на рис. 2, а. Элемент с памятью формы понимается как «черный ящик», задача состоит в разработке его адекватной феноменологической модели.

Рис. 2. Схематичное представление осциллятора с ЭПФ и обозначения базовых реологических элементов, на основе которых представляется СРМ элемента с ЭПФ

Fig. 2. Schematic representation of SMA oscillator and basic components used in rheological models with symbols for their mechanical characteristics

Модель элемента с ЭПФ строится на основе четырех базовых реологических элементов:

- модель Гука (абсолютно упругое тело) — рис. 2, б, далее МГ;
- модель абсолютно пластичного тела — рис. 2, в, далее АП;
- модель Хенки — рис. 2, д, далее МХ;

- модель упругого тела с ограниченными деформациями — рис. 2, е, далее МОД.

Адекватная комбинация абсолютно пластичного и абсолютно упругого элементов приводит к реологической модели, которая может быть использована в качестве модели эффекта псевдоупругости элемента с ЭПФ. Абсолютно пластичные элементы представляют процесс рассеяния энергии, в то время как абсолютно упругие элементы — процессы накопления энергии в материале.

Реологические модели

В качестве модельного представления элемента с ЭПФ, изображенного как черный ящик на рис. 2, далее рассматриваются несколько комбинаций реологических моделей.

Вне зависимости от характеристик СРМ уравнение движения осциллятора имеет вид

$$\ddot{X} = \frac{1}{m}(F - S), \quad (1)$$

где X — координата частицы; m — масса частицы (см. рис. 2, а); F — вынуждающая сила; S — реакция СРМ (внутренняя сила).

Рассмотрим простейшую СРМ, которая образована последовательным соединением МГ и параллельно соединенных элементов АП и МХ (рис. 3, а). Форма петли гистерезиса этой СРМ (рис. 3, б) до некоторой степени повторяет форму петли гистерезиса псевдоупругого элемента, отличие заключается в линейном характере участков. В момент начала нагружения перемещение является линейным и определяется жесткостью МГ (k_2). В момент достижения силой значения $T_0 + P_0$ появляется горизонтальный участок, моделирующий процесс механически индуцированного фазового перехода.

Недостаток этой модели в том, что линейный характер участков петли гистерезиса не отражает процесс возрастания жесткости структуры при механически индуцированном фазовом переходе. Ветвь разгрузки оказывается симметричной ветви нагружения. Как в случае ветви нагружения, процесс фазового перехода, обратного к механически индуцированному, моделируется горизонтальным линейным участком. И начало, и окончание процесса указанного фазового перехода соответствует одной и той же силе $P_0 - T_0$, но существенно различным деформациям. При дальнейшем снижении нагрузки поведение системы вновь определяется элементом МГ, деформация линейно снижается до нуля.

Для рассматриваемой СРМ реакция равна

$$S(t) = k_2(X(t) - X_{tr}(t)). \quad (2)$$

Скорость деформации при механически индуцированном фазовом переходе

$$\dot{X}_{tr}(t) = f_{SMA}(\dot{X}, X, X_{tr}), \quad (3)$$

Рис. 3. Трехэлементная СРМ и соответствующая петля псевдоупругости

Fig. 3. Basic rheological scheme of SMA material and the graph of hysteretic loop

если $|S| = P_0 + T_0$ и $S\dot{X} > 0$ или же $S\dot{X} < 0$, но $SX_{tr} > 0$, то $f_{SMA} = \dot{X}$; во всех остальных случаях $f_{SMA} = 0$.

Следующая итерация уточнения СРМ элемента с ЭПФ сводится к параллельному соединению МГ и модели, изображенной на рис. 3. Полученная модель (рис. 4) адекватно представляет процесс возрастания жесткости структуры при механически индуцированном фазовом переходе аустенита в мартенсит (верхняя ветвь на рис. 1).

Уравнение движения (1), будучи универсальным, сохраняет силу и для второй СРМ; изменяется лишь выражение для реакции системы:

$$\begin{aligned} S(t) &= S_1(t) + S_2(t) \\ S_1(t) &= k_1 X(t) \\ S_2(t) &= k_2 (X(t) - X_{tr}(t)), \end{aligned} \quad (4)$$

при этом в условиях, определяющих f_{SMA} в выражении (3), следует заменить $S(t)$ на $S_2(t)$.

Третья итерация уточнения СРМ элемента с ЭПФ сводится к включению МОД параллельно

элементам АП и МХ левой ветви СРМ на рис. 4. Такое включение моделирует конечность процесса механически индуцированного фазового перехода в процессе нагружения. Полученная СРМ показана на рис. 5.

Для реологической схемы на рис. 5 и уравнение движения (1), и соотношения (4) для реакции остаются справедливыми. Условия для соотношения (3) изменяются:

$$f_{SMA} = \begin{cases} \dot{X}, & |S_2| = P_0 + T_0 \wedge S_2 \dot{X} > 0 \wedge |X_{tr}| < \Delta, \\ \dot{X}, & |S_2| = P_0 - T_0 \wedge S_2 \dot{X} < 0 \wedge S_2 X_{tr} > 0, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (5)$$

Численный эксперимент: моделирование колебаний балки с ЭПФ

Моделируемая система состоит из невесомой балки длины l , на конце которой расположена масса m , на которую воздействует сила $P(t)$ (рис. 6). Балка представляет собой n стержней с ЭПФ в матрице, не влияющей на жесткость.

Рис. 4. Четырехэлементная СРМ, адекватно представляющая процесс упрочнения структуры

Fig. 4. Rheological scheme of SMA material with hardening and the graph of hysteretic loop

Рис. 5. Четырехэлементная СРМ, адекватно представляющая гистерезис с упрочнением в разрыве участка линейной работы

Fig. 5. Rheological scheme of SMA material with hardening and locking and the graph of hysteretic loop

Рис. 6. Моделируемая система

Fig. 6. Cantilever subjected to vertical force excitation

Геометрические характеристики системы приведены в табл. 1. Механические характеристики, определенные по результатам экспериментальных исследований, выполненных в работе [20], приведены в табл. 2. На основе значений табл. 1 и 2 определены характеристики четырехэлементной СРМ (табл. 3).

Табл. 1. Геометрические характеристики моделируемой системы

Table 1. Geometrical parameters

m , кг / m , kg	n	h , мм / h , mm	l , мм / l , mm	A_s , мм ² / A_s , mm ²
100	6	150	1000	314

Табл. 2. Механические характеристики моделируемой системы

Table 2. Mechanical parameters

E_1 , ГПа / E_1 , GPa	E_2 , ГПа / E_2 , GPa	σ_{p1} , МПа / σ_{p1} , MPa	σ_{p2} , МПа / σ_{p2} , MPa	Δ , мм / Δ , mm
50	5	140	380	80

Табл. 3. Параметры четырехэлементной СРМ

Table 3. Parameters of rheological model of SMA

k_1 , Н/мм / k_1 , N/mm	k_2 , Н/мм / k_2 , N/mm	T_0 , Н / T_0 , N	P_0 , Н / P_0 , N	Δ , мм / Δ , mm
179,75	1437,75	19 792	53 721	80

Для вынуждающей силы принят гармонический закон изменения:

$$F(t) = A \sin(\omega t), \quad (6)$$

где $A = 50$ кН — амплитуда;

$\omega = 4$ рад/с ($\nu = \frac{\omega}{2\pi} \approx 0,64$ Гц) — круговая частота.

Соотношения (1), (4) и (5) реализованы в пакете численной математики Wolfram Mathematica. Для численного решения системы дифференциальных уравнений использована функция *NDSolve*. Система решалась явным методом Эйлера (параметр *Explicit Euler* функции *NDSolve*).

В результате решения получена зависимость $X(t)$ координаты конца балки, зависимость $X_r(t)$ смещения, характеризующего процесс механически индуцированного фазового перехода процесса псевдоупругости (рис. 7), а также зависимость $\dot{X}(t)$ скорости смещения конца балки (рис. 8).

Петля гистерезиса балки с ЭПФ приведена на рис. 9.

Рис. 7. Смещение конца балки (сплошная линия) и смещение, обусловленное ЭПФ

Fig. 7. Time histories of the mass displacement (X) and the phase transformation displacement (X_p)

Рис. 8. Скорость конца балки

Fig. 8. Time history of rate of displacement ($\dot{X}$)

Рис. 9. Петля гистерезиса балки с ЭПФ

Fig. 9. Hysteretic loop of the analysed SMA oscillator

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе впервые представлены многокомпонентные реологические модели для конструкций с ЭПФ, позволяющие получить адекватные уравнения состояния. Предложенные модели отражают основные особенности процесса псевдоупругости: общую форму петли гистерезиса, эффект упрочнения структуры при механически индуцированном фазовом переходе и конечность указанного фазового перехода, и могут быть успешно исполь-

зованы для нестационарного модального анализа различных элементов строительных конструкций с ЭПФ — балок, рам, ферм и др.

Математическая модель предложенной СРМ, отражающей основные особенности ЭПФ, допускает простую алгоритмическую реализацию на языке пакетов численной математики и конечно-элементного анализа. Адекватность предложенной СРМ проиллюстрирована результатами выполненного численного эксперимента, в ходе которого выполнено моделирование колебаний балки с ЭПФ.

ЛИТЕРАТУРА. REFERENCES

1. *Ozbulut O.E., Hurlbaeus S.* Seismic response control using shape memory alloys: a review // *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. 2011. Vol. 22 (14). Pp. 1531–1549. DOI: 10.1177/1045389x11411220
2. *Das S., Mishra S.K.* Optimal performance of buildings isolated by shape-memory-alloy-rubber-bearing (smarb) under random earthquakes // *International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics*. 2014. Vol. 15 (3). Pp. 265–276. DOI: 10.1080/15502287.2014.882440
3. *Gur S., Mishra K.S., Bhowmick S., Chakraborty S.* Compliant liquid column damper modified by shape memory alloy device for seismic vibration control // *Smart Materials and Structures*. 2014. Vol. 23 (10). P. 105009. DOI: 10.1088/0964-1726/23/10/105009
4. *Auricchio F., Fugazza D., Desroches R.* Earthquake performance of steel frames with nitinol braces // *Journal of Earthquake Engineering*. 2006. Vol. 10 (1). Pp. 45–66. DOI: 10.1080/13632460609350628
5. *Tamai H., Kitagawa Y.* Pseudoelastic behavior of shape memory alloy wire and its application to seismic resistance member for building // *Computational Materials Science*. 2002. Vol. 25 (1–2). Pp. 218–227. DOI: 10.1016/s0927-0256(02)00266-5
6. *Ghassemieh M., Kari A.* Application of shape memory alloys in seismic control of steel structures // *Advances in Materials Science and Applications*. 2013. Vol. 2 (2). Pp. 66–72. DOI: 10.5963/amsa0202005
7. *DesRoches R., Taftali B., Ellingwood B.R.* Seismic performance assessment of steel frames with shape memory alloy connections. Part I — analysis and seismic demands // *Journal of Earthquake Engineering*. 2010. Vol. 14 (4). Pp. 471–486. DOI: 10.1080/13632460903301088
8. *Mohd Jani J., Leary M., Subic A., Gibson M.A.* A review of shape memory alloy research, applications and opportunities // *Materials & Design (1980–2015)*. 2014. Vol. 56. Pp. 1078–1113. DOI: 10.1016/j.matdes.2013.11.084
9. *Faiella G., Antonucci V.* Experimental Characterization of Shape Memory Alloys // *Shape Memory Alloy Engineering for Aerospace, Structural and Biomedical Applications*. Elsevier. 2015. Pp. 57–77. DOI: 10.1016/b978-0-08-099920-3.00003-6
10. *Antonucci V., Martone A.* Phenomenology of Shape Memory Alloys // *Shape Memory Alloy Engineering for Aerospace, Structural and Biomedical Applications*, Elsevier. 2015. Pp. 33–56. DOI: 10.1016/b978-0-08-099920-3.00002-4
11. *Savi M.A., Braga A.M.B.* Chaotic Vibrations of an Oscillator with Shape Memory // *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences*. 1993. Vol. 15 (1). Pp. 1–20.
12. *Machado L.G., Savi M.A., Pacheco P.M.C.L.* Nonlinear Dynamics and Chaos in Coupled Shape Memory Oscillators // *International Journal of Solids and Structures*. 2003. Vol. 40 (19). Pp. 5139–5156. DOI: 10.1016/s0020-7683(03)00260-9
13. *Sitnikova E., Pavlovskaya E., Ing J., Wiercigroch M.* Suppressing Nonlinear Resonances in an Impact Oscillator Using SMAs // *Smart Materials and Structures*. 2012. Vol. 21 (7). P. 075028. DOI: 10.1088/0964-1726/21/7/075028
14. *Grzesikiewicz W., Zbiciak A.* Constitutive modelling of pseudoelastic material using Kepes-type rheological element // *Comput. Syst. Aided Sci. Eng. Work Transp. Mech. Electr. Eng.* 2008. Vol. 122. Pp. 159–164.
15. *Grzesikiewicz W., Wakulicz A., Zbiciak A.* Model konstytutywny materiału SMA z lockingiem // *Modelowanie Inżynierskie*. 2009. Vol. 6 (37). Pp. 105–110.
16. *Grzesikiewicz W., Wakulicz A., Zbiciak A.* Mathematical modelling of rate-independent pseudoelastic SMA Material // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2011. Vol. 46 (6). Pp. 870–876. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2011.03.013
17. *Grzesikiewicz W., Zbiciak A.* Mathematical modelling of rate-dependent SMA material subjected to dynamic loads // *Proc. of 15th French-Polish Seminar of Mechanics*, Polytech'Lille, Villeneuve d'Ascq, France. 2007. Pp. 138–143.

18. Zbiciak A. Dynamic analysis of pseudoelastic SMA beam // International Journal of Mechanical Sciences. 2010. Vol. 52 (1). Pp. 56–64. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2009.10.003

19. Wasilewski K., Zbiciak A. Proposal of a new constitutive model for SMA with internal loops // 3rd Int. Conf. Prot. Hist. Constr. 2017. Pp. 129–130.

20. Auricchio F., Sacco E. A One-dimensional model for superelastic shape-memory alloys with different elastic properties between austenite and martensite // International Journal of Non-Linear Mechanics. 1997. Vol. 32 (6). Pp. 1101–1114. DOI: 10.1016/s0020-7462(96)00130-8

Поступила в редакцию 24 сентября 2018 г.

Принята в доработанном виде 8 марта 2019 г.

Одобрена для публикации 29 марта 2019 г.

Received September 24, 2018.

Adopted in a modified form March 8, 2019.

Approved for publication March 29, 2019.

О Б АВТОРАХ: **Збичак Артур** — доктор технических наук, доцент, заведующий кафедрой теоретической механики и моделирования дорожных одежд, факультет гражданского строительства, **Варшавский политехнический университет (ВПИ)**, 00-637, Польша, г. Варшава, пр. Народной Армии, д. 16, a.zbiciak@il.pw.edu.pl;

Василевский Каспер — магистр, ассистент кафедры основ строительства и зеленого строительства, факультет гражданского строительства, **Варшавский политехнический университет (ВПИ)**, 00-637, Польша, г. Варшава, пр. Народной Армии, д. 16, k.wasilewski@il.pw.edu.pl.

ABOUT THE AUTHORS: **Artur Zbiciak** — Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, Head of Department of Theoretical Mechanics and Pavement Modelling, Faculty of Civil Engineering, **Warsaw University of Technology (WUT)**, 16 Armii Ludowej avenue, Warsaw, 00-637, Poland, a.zbiciak@il.pw.edu.pl;

Kasper Wasilewski — Master of Science, Assistant in Department of Fundamentals of Buildings and Sustainable Development, Faculty of Civil Engineering, **Warsaw University of Technology (WUT)**, 16 Armii Ludowej avenue, Warsaw, 00-637, k.wasilewski@il.pw.edu.pl.