Тензор вязких напряжений и устойчивость ламинарных контрвихревых течений

А.Л. Зуйков^{1,2}, Е.В. Бажина²

¹Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ);
125319, г. Москва, Ленинградский проспект, д. 64;

²Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет
(НИУ МГСУ); 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26

АННОТАЦИЯ

Введение: в контрвихревых течениях коаксиальные слои вращаются в противоположных направлениях. Это определяет их сложную пространственную структуру. Актуальность темы в уникально эффективном перемешивании движущейся среды. Это свойство имеет потенциал применения от микробиологии и ракетостроения для получения высокодисперсных смесей до теплотехники для повышения интенсивности теплообмена. Однако контрвихревые течения обладают высокой степенью гидродинамической неустойчивости. Это затрудняет эффективное развитие указанных технологий. Контрвихревые течения наблюдаются в отсасывающих трубах гидротурбин Френсиса, работа которых на пониженной мощности вызывает режимы со значительным нарастанием вибраций гидроагрегатов, вплоть до их разрушения. Цель исследования — выявление физических закономерностей гидродинамики контрвихревых течений общих как при ламинарных, так и турбулентных режимах движения жидкости.

Материалы и методы: теоретический анализ тензора вязких напряжений и зон локальной устойчивости контрвихревых ламинарных течений.

Результаты: приведено математическое описание тензора вязких касательных (τ_{ij}) и нормальных (σ_{ij}) напряжений, а также определены зоны локальной устойчивости течения по критериям Рэлея (Ra) и Ричардсона (Ri). Приведены графики радиально-аксиальных распределений компонент вязких напряжений, зон локальной устойчивости, показана точка «распада» течения. Решения получены в виде рядов Фурье – Бесселя. Выполнен анализ гидродинамической структуры течения.

Выводы: установлено, что наиболее значительные вязкие напряжения наблюдаются в начале зоны взаимодействия противоположно вращающихся слоев. Вихревое ядро, окружающее геометрическую ось потока, является областью с наиболее неустойчивым течением. В верхних слоях ядра расположена зона слабой неустойчивости с числами Ричардсона до $Ri = -1$, ниже нее (ближе к центру потока) лежит зона дестабилизации течения с числами Ричардсона $Ri =$ от -10 до -100 , примыкает к оси потока зона с быстро нарастающей неустойчивостью до значений $Ri = -1000$. Это зона потери устойчивости течения, завершающаяся «распадом вихря».

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: противоположно вращающиеся коаксиальные слои, ряды Фурье – Бесселя, распад вихря

ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ: Зуйков А.Л., Бажина Е.В. Тензор вязких напряжений и устойчивость ламинарных контрвихревых течений // Вестник МГСУ. 2019. Т. 14. Вып. 7. С. 870–884. DOI: 10.22227/1997-0935.2019.7.870-884

Viscous stress tensor and stability of laminar counter-vortex flows

Andrey L. Zuikov^{1,2}, Elena V. Bazhina²

¹Moscow Automobile and Road Construction State Technical University (MADI);
64 Leningradsky prospect, Moscow, 125319, Russian Federation;

²Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (MGSU);
26 Yaroslavskoe shosse, Moscow, 129337, Russian Federation

ABSTRACT

Introduction: coaxial layers in counter-vortex flows rotate in the opposite directions. This determines their complicated spatial structure. The relevance of the subject is in the uniquely effective mixing of the moving medium. This property has a great potential of application from microbiology and missile building for obtaining highly dispersed mixtures to heat engineering for increasing the intensity of heat transfer. However, counter-vortex flows have a high degree of hydrodynamic instability. This hinders effective development of these technologies. Counter-vortex flows are observed behind Francis hydroturbines, whose derated operation causes modes with a significant increase of hydraulic unit vibrations up to destruction of the units. The purpose of the study is to identify physical laws of the counter-vortex flow hydrodynamics, common for both laminar and turbulent fluid flow modes.

Materials and methods: theoretical analysis of the viscous stress tensor and local stability zones of counter-vortex laminar flows.

Results: the article provides a mathematical description of the tensor of viscous tangential (τ_{ij}) and normal (σ_{ij}) stresses as well as local stability zones of the flow according to Rayleigh (Ra) and Richardson (Ri) criteria. The graphs of the radial-axial distributions of the viscous stress components are given, local stability zones are shown and the point of “vortex breakdown” is indicated. The solutions are obtained in the form of Fourier – Bessel series. The hydrodynamic structure of the flow is analysed.

Conclusions: it is established that the most significant viscous stresses are observed at the beginning of the interaction zone of contrarotating layers. It is established that the areas with the most unstable flow are localized in the flow vortex core. Three zones can be distinguished in the vortex core: a zone of weak instability with local Richardson numbers to $Ri = -1$, passing into a zone of flow destabilization with high negative values of Richardson numbers $Ri = -10$ to -100 , in turn, transforming into a zone with rapidly increasing instability up to $Ri = -1000$. This is a zone of loss of flow stability, culminating in the “ortex breakdown”.

KEYWORDS: contrarotating coaxial layers, Fourier-Bessel series, vortex breakdown

FOR CITATION: Zuikov A.L., Bazhina E.V. Viscous stress tensor and stability of laminar counter-vortex flows. *Vestnik MGSU* [Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering]. 2019; 14:7:870-884. DOI: 10.22227/1997-0935.2019.7.870-884 (rus.).

ВВЕДЕНИЕ

Статья посвящена исследованию модели описания тензора вязких напряжений и зон локальной устойчивости вязкого течения несжимаемой жидкости, в технической и нормативной литературе получившего название «контрвихревое» [1, 2]. Течение характеризуется тем, что его коаксиальные слои вращаются в противоположных направлениях. Причем, количество слоев со встречным вращением неограниченно, например, на рис. 1, а показано контрвихревое течение¹, состоящее всего из двух слоев с противоположной закруткой.

Актуальность темы определяется тем, что контрвихревые течения характеризуются эффективным перемешиванием движущейся жидкой среды. Это свойство особенно в турбулентном диапазоне имеет большой потенциал практического применения [3–5] от микробиологии, энергетики и ракетостроения для получения высокодисперсных коллоидных или горючих смесей до теплотехники для повышения интенсивности теплообмена [6–9]. Однако контрвихревые течения обладают крайне высокой степенью гидро-

¹ СО 34.21.308-2005. Гидротехника. Основные понятия. Термины и определения. СПб. : ВНИИГ им. Б.Е. Веденеева, 2005. 51 с.

Рис. 1. Структура контрвихревого течения в цилиндрической трубе: а — профили азимутальных (u_θ) и аксиальных (u_x) скоростей двухслойного течения; б — составляющие векторов скорости, вихря элементарной частицы жидкости и тензора вязких напряжений

Fig. 1. Structure of contravortical flow in cylindrical pipe: а — profiles of azimuthal (u_θ) and axial (u_x) velocities of two-layer flow; б — components of velocity vectors, elementary fluid particle vortex and viscous stress tensor

динамической неустойчивости, что существенно затрудняет эффективное развитие указанных технологий. Сегодня проблемой устойчивости контрвихревых течений занимаются многие российские [10–17] и зарубежные [18–29] ученые. Явление связано с весьма интенсивным гашением встречной закрутки взаимодействующих слоев вследствие высоких значений компонентов тензора вязких напряжений, что приводит далее к потере устойчивости и в результате «распаду» контрвихревого течения (в англоязычной литературе явление называется «vortex breakdown»). Контрвихревые течения наблюдаются в конусах отсасывающих труб за гидротурбинами Френсиса при ненормальных режимах их работы [20–29]. Сегодня неустойчивая работа гидротурбин Френсиса на режимах регулирования их мощности или при мощности менее номинальной вызывает самые серьезные опасения, связанные с резким и значительным возрастанием вибраций гидроагрегатов, вплоть до их разрушения. Цель теоретического исследования — определение физических закономерностей гидродинамики ламинарных контрвихревых течений.

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЙ

Метод исследований: теоретический анализ тензора вязких напряжений и зон локальной устойчивости контрвихревых ламинарных течений. Основой исследования послужила опубликованная в последнее время работа [30], в которой в цилиндрической системе координат $r - \theta - x$ для установившегося $(\partial u_i / \partial t)$ симметричного относительно оси цилиндрического канала $(\partial u_i / \partial \theta)$ (см. рис. 1, а) неравномерного контрвихревого течения вязкой несжимаемой жидкости, описываемого уравнениями Навье – Стокса и неразрывности [17], получены радиально-аксиальные $(r - x)$ распределения нормированных по средней скорости потока $(V = Q/\pi R^2)$, где R — радиус трубы; Q — общий объемный расход течения) азимутальных (u_θ) , аксиальных (u_x) и радиальных (u_r) скоростей, имеющих вид рядов Фурье – Бесселя [31] или произведений рядов Фурье – Бесселя

$$u_\theta(r, x, \text{Re}) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} G_n \frac{J_1(\lambda_n r)}{\lambda_n J_0(\lambda_n)} \exp\left(-\lambda_n^2 \frac{x}{\text{Re}}\right), \quad (1)$$

$$\begin{aligned} u_x(r, x, \text{Re}) = & 2(1-r^2) - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{4}{\lambda_i^2} \left[1 - \frac{J_0(\lambda_i r)}{J_0(\lambda_i)} \right] \exp\left(-\lambda_i^2 \frac{x}{\text{Re}}\right) + \\ & + 2 \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G_n}{\lambda_n^2} \left[1 + \frac{J_0(\lambda_n \sqrt{2}) - J_0(\lambda_n \sqrt{2} r)}{J_2(\lambda_n \sqrt{2})} \right] \exp\left(-\lambda_n^2 \frac{x}{\text{Re}}\right) \sum_{k=1}^{\infty} G_k \exp\left(-\lambda_k^2 \frac{x}{\text{Re}}\right) - \right. \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} G_n \frac{J_0(\lambda_n r)}{\lambda_n^2 J_0(\lambda_n)} \exp\left(-\lambda_n^2 \frac{x}{\text{Re}}\right) \sum_{k=1}^{\infty} G_k \frac{J_0(\lambda_k r)}{J_0(\lambda_k)} \exp\left(-\lambda_k^2 \frac{x}{\text{Re}}\right) - \\ & \left. - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G_n^2}{\lambda_n^2} \left[\frac{J_0(\lambda_n \sqrt{2}) - J_0(\lambda_n \sqrt{2} r)}{J_2(\lambda_n \sqrt{2})} \right] \exp\left(-2\lambda_n^2 \frac{x}{\text{Re}}\right) \right\}, \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_r(r, x, \text{Re}) = & -\frac{2}{\text{Re}} \sum_{i=1}^{\infty} \left[r - \frac{2J_1(\lambda_i r)}{\lambda_i J_0(\lambda_i)} \right] \exp\left(-\lambda_i^2 \frac{x}{\text{Re}}\right) + \\ & + \frac{1}{\text{Re}} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} G_n \left[r + \frac{rJ_0(\lambda_n \sqrt{2})}{J_2(\lambda_n \sqrt{2})} - \frac{\sqrt{2}J_1(\lambda_n r \sqrt{2})}{\lambda_n J_2(\lambda_n \sqrt{2})} \right] \exp\left(-\lambda_n^2 \frac{x}{\text{Re}}\right) \sum_{k=1}^{\infty} G_k \exp\left(-\lambda_k^2 \frac{x}{\text{Re}}\right) + \right. \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G_n}{\lambda_n^2} \left[r + \frac{rJ_0(\lambda_n \sqrt{2})}{J_2(\lambda_n \sqrt{2})} - \frac{\sqrt{2}J_1(\lambda_n r \sqrt{2})}{\lambda_n J_2(\lambda_n \sqrt{2})} \right] \exp\left(-\lambda_n^2 \frac{x}{\text{Re}}\right) \sum_{k=1}^{\infty} G_k \lambda_k^2 \exp\left(-\lambda_k^2 \frac{x}{\text{Re}}\right) - \\ & - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G_n \lambda_n J_1(\lambda_n r)}{J_0(\lambda_n)} \exp\left(-\lambda_n^2 \frac{x}{\text{Re}}\right) \left[\sum_{k=1}^{n-1} \frac{G_k J_0(\lambda_k r)}{(\lambda_n^2 - \lambda_k^2) J_0(\lambda_k)} \exp\left(-\lambda_k^2 \frac{x}{\text{Re}}\right) + \right. \\ & + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{G_k J_0(\lambda_k r)}{(\lambda_n^2 - \lambda_k^2) J_0(\lambda_k)} \exp\left(-\lambda_k^2 \frac{x}{\text{Re}}\right) \left. \right] - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G_n J_1(\lambda_n r)}{\lambda_n J_0(\lambda_n)} \exp\left(-\lambda_n^2 \frac{x}{\text{Re}}\right) \times \\ & \times \left[\sum_{k=1}^{n-1} \frac{G_k \lambda_k^2 J_0(\lambda_k r)}{(\lambda_n^2 - \lambda_k^2) J_0(\lambda_k)} \exp\left(-\lambda_k^2 \frac{x}{\text{Re}}\right) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{G_k \lambda_k^2 J_0(\lambda_k r)}{(\lambda_n^2 - \lambda_k^2) J_0(\lambda_k)} \exp\left(-\lambda_k^2 \frac{x}{\text{Re}}\right) \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G_n J_0(\lambda_n r)}{J_0(\lambda_n)} \exp\left(-\lambda_n^2 \frac{x}{\text{Re}}\right) \left[\sum_{k=1}^{n-1} \frac{G_k \lambda_k J_1(\lambda_k r)}{(\lambda_n^2 - \lambda_k^2) J_0(\lambda_k)} \exp\left(-\lambda_k^2 \frac{x}{\text{Re}}\right) + \right. \\
& + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{G_k \lambda_k J_1(\lambda_k r)}{(\lambda_n^2 - \lambda_k^2) J_0(\lambda_k)} \exp\left(-\lambda_k^2 \frac{x}{\text{Re}}\right) \left. \right] + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G_n J_0(\lambda_n r)}{\lambda_n^2 J_0(\lambda_n)} \exp\left(-\lambda_n^2 \frac{x}{\text{Re}}\right) \times \\
& \times \left[\sum_{k=1}^{n-1} \frac{G_k \lambda_k^3 J_1(\lambda_k r)}{(\lambda_n^2 - \lambda_k^2) J_0(\lambda_k)} \exp\left(-\lambda_k^2 \frac{x}{\text{Re}}\right) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{G_k \lambda_k^3 J_1(\lambda_k r)}{(\lambda_n^2 - \lambda_k^2) J_0(\lambda_k)} \exp\left(-\lambda_k^2 \frac{x}{\text{Re}}\right) \right] - \\
& - 2 \sum_{n=1}^{\infty} G_n^2 \left[\frac{r J_0^2(\lambda_n r) + r J_1^2(\lambda_n r)}{J_0^2(\lambda_n)} + \frac{r J_0(\lambda_n \sqrt{2})}{J_2(\lambda_n \sqrt{2})} - \frac{\sqrt{2} J_1(\lambda_n r \sqrt{2})}{\lambda_n J_2(\lambda_n \sqrt{2})} \right] \exp\left(-2 \lambda_n^2 \frac{x}{\text{Re}}\right) \Bigg\}, \quad (3)
\end{aligned}$$

где r и x — радиальная и продольная координаты, отнесенные к радиусу трубы R ; Re — число Рейнольдса, $\text{Re} = VR/\nu$; ν — кинематическая вязкость жидкости; $J_0(\dots)$, $J_1(\dots)$ и $J_2(\dots)$ — функции Бесселя первого рода от нулевого до второго порядка; λ_n и λ_k — нули функции Бесселя первого рода первого порядка; λ_i — нули функции Бесселя первого рода второго порядка; G_n и G_k — константы закрутки потока на входе в активную зону (при $x = 0$) для n -го и k -го частных решений

$$G_n = \Gamma_0 \left[\frac{1}{J_0(\lambda_n)} - 1 \right] - \Omega_0 - \frac{A_0 J_1(\eta)}{1 - (\eta/\lambda_n)^2}; \quad G_k = \Gamma_0 \left[\frac{1}{J_0(\lambda_k)} - 1 \right] - \Omega_0 - \frac{A_0 J_1(\eta)}{1 - (\eta/\lambda_k)^2}, \quad (4)$$

где Γ_0 , Ω_0 , A_0 и η (где $\eta \neq \lambda_n$ и $\eta \neq \lambda_k$ — безразмерные (нормированные) параметры радиального распределения азимутальных скоростей на входе в активную зону (при $x = 0$))

$$u_0|_{x=0} = \frac{\Gamma_0}{r} + \Omega_0 r + A_0 J_1(\eta r),$$

под «активной зоной» понимается участок интенсивного взаимодействия спутных противоположно вращающихся слоев.

Графики радиально-аксиального распределения нормированных азимутальных, аксиальных и радиальных скоростей показаны в той же работе [30]. В целом кинематическая структура контрвихревых течений характеризуется высокими радиальными и продольными градиентами азимутальных и аксиальных скоростей, что связано с действием внутренних силовых полей, определяемых вязкими касательными (τ_{ij}) и нормальными (σ_{ii}) напряжениями (рис. 1, б).

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ

Согласно труду [17] в симметричных относительно продольной оси трубы ($\partial u_i / \partial \theta = 0$) течениях в соответствии с распределениями скоростей (1)–(4), получим следующие распределения нормированного тензора вязких касательных

$$\begin{aligned}
\frac{\tau_{r\theta}(r, x, \text{Re})}{\mu} &= \frac{\tau_{\theta r}(r, x, \text{Re})}{\mu} = r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_0}{r} \right) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} G_n \frac{J_2(\lambda_n r)}{J_0(\lambda_n)} \exp\left(-\lambda_n^2 \frac{x}{\text{Re}}\right), \\
\frac{\tau_{\theta x}(r, x, \text{Re})}{\mu} &= \frac{\tau_{x\theta}(r, x, \text{Re})}{\mu} = \frac{\partial u_0}{\partial x} = -\frac{2}{\text{Re}} \sum_{n=1}^{\infty} G_n \frac{\lambda_n J_1(\lambda_n r)}{J_0(\lambda_n)} \exp\left(-\lambda_n^2 \frac{x}{\text{Re}}\right), \\
\frac{\tau_{xr}(\vec{\delta}, \text{Re})}{\mu} &= \frac{\tau_{rx}(\vec{\delta}, \text{Re})}{\mu} = \frac{u_0}{\partial r} = -4 \left[r + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(\lambda_i)}{\lambda_i J_0(\lambda_i)} \exp\left(-\lambda_i^2 \frac{x}{\text{Re}}\right) \right] + \\
& + 2 \left[\sum_{n=1}^{\infty} G_n \frac{\sqrt{2} J_1(\lambda_n \sqrt{2} r)}{\lambda_n J_2(\lambda_n \sqrt{2})} \exp\left(-\lambda_n^2 \frac{x}{\text{Re}}\right) \sum_{k=1}^{\infty} G_k \exp\left(-\lambda_k^2 \frac{x}{\text{Re}}\right) + \right. \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} G_n \frac{J_1(\lambda_n r)}{\lambda_n J_0(\lambda_n)} \exp\left(-\lambda_n^2 \frac{x}{\text{Re}}\right) \sum_{k=1}^{\infty} G_k \frac{J_0(\lambda_k r)}{J_0(\lambda_k)} \exp\left(-\lambda_k^2 \frac{x}{\text{Re}}\right) + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} G_n \frac{J_0(\lambda_n r)}{\lambda_n^2 J_0(\lambda_n)} \exp\left(-\lambda_n^2 \frac{x}{\text{Re}}\right) \sum_{k=1}^{\infty} G_k \frac{\lambda_k J_1(\lambda_k r)}{J_0(\lambda_k)} \exp\left(-\lambda_k^2 \frac{x}{\text{Re}}\right) - \\
& \left. - \sum_{n=1}^{\infty} G_n^2 \frac{\sqrt{2} J_1(\lambda_n \sqrt{2} r)}{\lambda_n J_2(\lambda_n \sqrt{2})} \exp\left(-2 \lambda_n^2 \frac{x}{\text{Re}}\right) \right].
\end{aligned}$$

и нормальных напряжений

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{xx}(r, x, \text{Re})}{\mu} = & -2 \frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{8}{\text{Re}} \sum_{i=1}^{\infty} \left[1 - \frac{J_0(\lambda_i r)}{J_0(\lambda_i)} \right] \exp\left(-\lambda_i^2 \frac{x}{\text{Re}}\right) + \\ & + \frac{4}{\text{Re}} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} G_n \left[1 + \frac{J_0(\lambda_n \sqrt{2}) - J_0(\lambda_n \sqrt{2}r)}{J_2(\lambda_n \sqrt{2})} \right] \exp\left(-\lambda_n^2 \frac{x}{\text{Re}}\right) \sum_{k=1}^{\infty} G_k \exp\left(-\lambda_k^2 \frac{x}{\text{Re}}\right) + \right. \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G_n}{\lambda_n^2} \left[1 + \frac{J_0(\lambda_n \sqrt{2}) - J_0(\lambda_n \sqrt{2}r)}{J_2(\lambda_n \sqrt{2})} \right] \exp\left(-\lambda_n^2 \frac{x}{\text{Re}}\right) \sum_{k=1}^{\infty} G_k \lambda_k^2 \exp\left(-\lambda_k^2 \frac{x}{\text{Re}}\right) - \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} G_n \frac{J_0(\lambda_n r)}{J_0(\lambda_n)} \exp\left(-\lambda_n^2 \frac{x}{\text{Re}}\right) \sum_{k=1}^{\infty} G_k \frac{J_0(\lambda_k r)}{J_0(\lambda_k)} \exp\left(-\lambda_k^2 \frac{x}{\text{Re}}\right) - \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} G_n \frac{J_0(\lambda_n r)}{\lambda_n^2 J_0(\lambda_n)} \exp\left(-\lambda_n^2 \frac{x}{\text{Re}}\right) \sum_{k=1}^{\infty} G_k \frac{\lambda_k^2 J_0(\lambda_k r)}{J_0(\lambda_k)} \exp\left(-\lambda_k^2 \frac{x}{\text{Re}}\right) - \\ & \left. - 2 \sum_{n=1}^{\infty} G_n^2 \left[\frac{J_0(\lambda_n \sqrt{2}) - J_0(\lambda_n \sqrt{2}r)}{J_2(\lambda_n \sqrt{2})} \right] \exp\left(-2\lambda_n^2 \frac{\delta}{\text{Re}}\right) \right\}, \\ \frac{\sigma_{\theta\theta}(r, x, \text{Re})}{\mu} = & -2 \frac{u_r(r, x, \text{Re})}{r}, \\ \frac{\sigma_{rr}(r, x, \text{Re})}{\mu} = & -\frac{\sigma_{xx}(r, x, \text{Re})}{\mu} - \frac{\sigma_{\theta\theta}(r, x, \text{Re})}{\mu}, \end{aligned}$$

где μ — коэффициент динамической вязкости жидкости, $\mu = \rho\nu$; ρ — плотность жидкости.

Профили вязких напряжений показаны на рис. 2 для двухслойного течения и на рис. 3 — для четырехслойного.

Расчеты графиков выполнены при числах Рейнольдса, равных $\text{Re} = 450$. Показаны два течения: первое двухслойное с параметрами $\Gamma_0 = -1,216$, $\Omega_0 = 4,241$, $A_0 = 0$; второе четырехслойное с параметрами $\Gamma_0 = \Omega_0 = 0$, $A_0 J_1(\eta) = 0,1584$, $\eta = 13,3$. На графиках по отношению к радиусу трубы ($x = 5R, 10, 20, 40, 80$) указаны расстояния от входного створа до сечений, в которых выполнялись расчеты профилей эпюр напряжений.

В начальной стадии взаимодействия противоположно закрученных слоев в створах на расстоянии до $x = 5R$ от входного сечения активной зоны, как и следовало ожидать, все вязкие касательные ($\tau_{ij} = \tau_{ji}$) и нормальные (σ_{ii}) напряжения имеют максимальные значения. Причем эти напряжения, достигающие $\tau_{xr}/\mu = \tau_{rx}/\mu = \pm 125$ нормированных единиц и меняющие (кроме $\sigma_{\theta\theta}$) свой знак вдоль радиуса несколько раз, имеют место во внутренних слоях контрвихревых течений. Несомненно, это результат жесткого вязкого взаимодействия противоположно закрученных слоев. Это кардинально отличает контрвихревые потоки от потоков закрученных [17], где аналогичные напряжения наблюдаются только в вихревом ядре на геометрической оси трубы, и от равномерных осевых потоков Пуазейля – Гагена, где касательные напряжения малы и составляют

$$\frac{\tau_{xr}}{\mu} = \frac{\tau_{rx}}{\mu} = \frac{\partial u_x}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} [2(1-r^2)] = -4r,$$

достигая, таким образом, своего предельного нормированного значения ± 4 на стенках труб (при $r = \pm 1$).

Сопоставление двухслойного и четырехслойного контрвихревых течений показывает, что повышение слоистости течения приводит к пропорциональному нарастанию частоты смены знака вдоль радиуса у всех компонент тензора вязких напряжений (кроме $\sigma_{\theta\theta}$) и к пропорциональному нарастанию касательных напряжений $\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r}$ и $\tau_{\theta x} = \tau_{x\theta}$. В результате в многослойных течениях имеет место пропорциональное более интенсивное подавление закрутки взаимодействующих слоев и соответствующее сокращение длины активной зоны. Эти же факторы способствуют тенденции к потере устойчивости многослойных ламинарных контрвихревых течений и переходу их в турбулентные потоки с высокой интенсивностью процессов энерго- и массообмена между взаимодействующими слоями. А также ведет к скорейшему «распаду» многослойных контрвихревых течений.

Под гидродинамической устойчивостью будем далее понимать способность течения подавлять возмущения, возникающие в нем. Под потерей гидродинамической устойчивости соответственно будем понимать неспособность течения подавлять возникающие в нем возмущения. При потере гидродинамической

Рис. 2. Компоненты нормированного тензора вязких напряжений в двухслойном контрвихревом течении

Fig. 2. Components of normalized viscous stress tensor in two-layer contravortical flow

Рис. 3. Компоненты нормированного тензора вязких напряжений в четырехслойном контрвихревом течении

Fig. 3. Components of normalized viscous stress tensor in four-layer contravortical flow

ской устойчивости прежнее течение переходит в иное более устойчивое течение. Этот переход от одного движения к другому может происходить в различной форме, например, в форме ламинарно-турбулентной трансформации или в форме «развала» контрвихревого течения, в англоязычной литературе называемого «vortex breakdown», с трансформацией в осевой поток.

Для определения зон локальной устойчивости в толще контрвихревого течения будем использовать метод Рэлея [17], существо которого заключается в следующем. Так как массообмен между коаксиальными слоями потока определяется исключительно радиальными смещениями элементарных частиц жидкости, то условия локальной устойчивости течения можно определить следующим путем: положим, что элементарная частица жидкости (см. рис. 1, б) массой $\rho \cdot dr \cdot rd\theta \cdot dx$ случайно переместилась с радиуса r_0 на радиусе r , и это перемещение $\Delta r = r - r_0$ малое, то действующие на элементарную частицу силы, составляющие разность между силами давления P и инерционными массовыми центробежными силами с ускорением j

$$P \cdot rd\theta \cdot dx - \left(P + \frac{\partial P}{\partial r} dr \right) \cdot rd\theta \cdot dx + j \cdot \rho \cdot dr \cdot rd\theta \cdot dx,$$

могут: либо вернуть частицу на ее исходную траекторию, и тогда течение в данной локальной области будет устойчивым, а возникающие возмущения будут подавляться; либо действующие на элементарную частицу жидкости силы будут стремиться продолжить ее перемещение, что в результате приведет к местной потере устойчивости течения. Когда потеря устойчивости характерна для значительной области потока, то течение может потерять устойчивость в целом, включая его последующий «распад».

Согласно сказанному, локальная гидродинамическая устойчивость определяется неравенствами

$$\frac{\partial P}{\partial r} - \rho j \begin{cases} > 0 & \text{при } \Delta r = r - r_0 > 0, \\ < 0 & \text{при } \Delta r = r - r_0 < 0 \end{cases} \text{ или } Ra = \left(\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial r} - j \right) \frac{1}{\Delta r} > 0, \quad (5)$$

где Ra — число Рэлея.

В соответствии с теорией переноса завихренности Тейлора [17], примем, что на длине пути перемещения Δr завихренность элементарной частицы жидкости не изменяется

$$\text{rot}_x U = \frac{\partial(ru_\theta)}{r \partial r} = \text{const}, \quad (6)$$

где $\text{rot}_x U$ — продольная компонента вихря на радиусе до перемещения.

Исходя из равенств (5) и (6), в монографии [17] получен критерий локальной устойчивости течения по Рэлею в виде

$$Ra = -\frac{\partial}{r \partial r} \left[ru_\theta \frac{\partial(ru_\theta)}{r \partial r} \right] = 4 \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} G_n \frac{J_1(\lambda_n r)}{\lambda_n J_0(\lambda_n)} \exp \left(-\lambda_n^2 \frac{x}{\text{Re}} \right) \times \right. \\ \left. \times \sum_{k=1}^{\infty} G_k \frac{\lambda_k J_1(\lambda_k r)}{J_0(\lambda_k)} \exp \left(-\lambda_k^2 \frac{x}{\text{Re}} \right) - \left[\sum_{n=1}^{\infty} G_n \frac{J_0(\lambda_n r)}{J_0(\lambda_n)} \exp \left(-\lambda_n^2 \frac{x}{\text{Re}} \right) \right]^2 \right\} > 0.$$

Можно видеть, что знак (плюс или минус) частной производной по радиусу произведения циркуляции ($\Gamma = ru_\theta$) на продольную компоненту вихря ($\text{rot}_x U$) определяет локальную устойчивость течения по критерию Рэлея (Ra). Если эта производная меньше нуля, то число Рэлея положительно $Ra > 0$, тогда действующие силы, имея консервативный характер, стремятся подавить любые возникающие возмущения, сохраняя в локальной области гидродинамическую устойчивость течения. Если производная больше нуля, то критерий Рэлея имеет отрицательное значение $Ra < 0$, при этом действующие силы имеют активный характер и способствуют потере течением локальной гидродинамической устойчивости. Таким образом, критерий Рэлея позволяет определить в контрвихревых течениях области генерирования возмущений и их подавления, но не отвечает на вопрос о степени этой локальной устойчивости или неустойчивости.

В то же время известен иной критерий — число Ричардсона (Ri), равное числу Рэлея (Ra), деленному на квадратичный инвариант тензора скоростей деформации (J^2) [17]

$$Ri = Ra/J^2,$$

где при осевой симметрии течения ($\partial/\partial\theta = 0$)

$$J^2 = 2 \left[\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{u_r}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial x} \right)^2 = \\ = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\sigma_{rr}}{\mu} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\theta\theta}}{\mu} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{xx}}{\mu} \right)^2 \right] + \left(\frac{\tau_{r\theta}}{\mu} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{\theta x}}{\mu} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{xr}}{\mu} \right)^2. \quad (7)$$

Имея одинаковую размерность $[c^{-2}]$, число Рэлея и квадратичный инвариант тензора скоростей деформации или, как его еще называют — квадратичный инвариант тензора вязких напряжений (см. формулу (7)), в результате деления позволяют получить безразмерное число Ричардсона, характеризующее местное соотношение с одной стороны сил, воздействующих на элементарную частицу жидкости при ее малых стохастических перемещениях и способствующих либо их подавлению, либо нарастанию, с другой стороны сил тензора вязких напряжений. Причем в ламинарном течении тензор вязких напряжений, являясь отражением фундаментальных законов природы, сам стохастической величиной не является, но при высоких значениях он может провоцировать стохастические перемещения элементарных частиц жидкости. Именно поэтому число Ричардсона реально отражает величину местной локальной устойчивости течения.

Поясним это на конкретных примерах, предварительно замечая, что квадратичный инвариант тензора вязких напряжений величина строго положительная $J^2 > 0$. Предположим число Ричардсона больше единицы ($Ri > 1$), т.е. имеет место неравенство $Ra > J^2$, которое означает, что силы стабилизирующие течения превосходят силы порождающие неустойчивость, в том числе провоцируемую тензором вязких напряжений, отсюда следует, что в данной локальной области потока течение будет устойчивым, а возникающие в нем возмущения будут подавляться. Положим теперь, что числа Ричардсона существенно меньше нуля ($Ri \ll 0$), т.е. $Ra < 0$ и $|Ra| \gg J^2$, в этом случае течение неизбежно потеряет устойчивость, ибо стохастические перемещения элементарных частиц жидкости значительно превосходят естественные перемещения, соответствующие квадратичному инварианту тензора вязких напряжений. Возмущения в потоке будут иметь тенденцию к нарастанию. В результате это может вызвать дальнейшее стремительное нарастание потери устойчивости течением в целом, завершающейся «распадом» контрвихревого течения, с трансформацией его в осевой поток.

Диаграммы чисел Ричардсона для расчетных двухслойного и четырехслойного контрвихревых течений приведены на рис. 4, а и 4, б, соответственно. Параметры, при которых выполнялись расчеты, как и характеристики двух исследуемых контрвихревых течений на входе в активную зону указаны выше. На рисунке показан участок, захватывающий не только всю активную зону, но и еще значительную часть трубы, суммарной протяженностью $80R$ для двухслойного течения и $40R$ — для четырехслойного. Ввиду симметричности течений относительно оси трубы радиальный диапазон на рисунках принят от 0 до $r/R = 1$. Кривыми белого цвета отмечены линии, на которых числа Рэлея и Ричардсона имеют нулевые значения ($Ra = Ri = 0$), разделяющие тем самым области с положительными значениями этих параметров от областей — с отрицательными. Области с положительными значениями чисел Рэлея и Ричардсона ($Ra > 0$, $Ri > 0$), т.е. с устойчивым течением, в которых стохастические возмущения подавляются, указаны на рис. 4 литерой «В», соответственно, области с отрицательными значениями чисел Рэлея и Ричардсона ($Ra < 0$, $Ri < 0$), т.е. области, в которых течение теряет гидродинамическую устойчивость, а стохастические возмущения нарастают, указаны на рис. 4 литерой «А».

По диаграммам на рис. 4 можно видеть, что гидродинамическая устойчивость течений (области $B_1 - B_4$) сохраняется только в толще противоположно закрученных слоев, за пределами границ их вязкого трения. Постепенно по мере продвижения течения вдоль активной зоны границы вязкого трения смежных противоположно закрученных слоев расширяются, что приводит в результате к разрушению областей течения, сохраняющих гидродинамическую устойчивость. В результате в двухслойном течении сохраняются обе области с устойчивым течением на выходе из активной зоны (B_1, B_2), которые были и на входе в нее, а в четырехслойном течении с более интенсивным вязким трением противоположно закрученных слоев из четырех таких областей ($B_1 - B_4$) остается лишь одна (B_2).

Течения, потерявшие гидродинамическую устойчивость, указанные литерой «А», располагаются вдоль твердых границ потока (A_1), вдоль зон интенсивного вязкого трения между смежными противоположно закрученными слоями и вдоль вихревого шнура, окружающего геометрическую ось потока и обладающего наиболее неустойчивым течением. В двухслойном течении (рис. 4, а) вихревой шнур указан литерой A_3 , в четырехслойном (рис. 4, б) — A_5 . В верхних слоях вихревого шнура (или как его еще называют — вихревого ядра) расположена зона слабой неустойчивости с числами Ричардсона до $Ri = -1$, ниже нее (ближе к центру потока) лежит зона дестабилизации течения с числами Ричардсона Ri от -10 до -100 , примыкает к геометрической оси потока зона с быстро нарастающей неустойчивостью до значений $Ri = -1000$. Это зона потери устойчивости течения, завершающаяся «распадом» контрвихревого течения, с трансформацией его в осевой поток. Можно видеть, что при заданных параметрах расчета и характеристиках потоков на входе в активную зону в двухслойном контрвихревом течении (рис. 4, а) точка «распада» находится в районе створа $32R$ от начала активной зоны, а в четырехслойном (рис. 4, б) — в районе $16R$. Саму точку «распада» следует рассматривать как створ, замыкающий активную зону.

Рис. 4. Зоны локальной устойчивости контрвихревых течений: *a* — двухслойного; *b* — четырехслойного

Fig. 4. Local stability zones of contravortical flows: *a* — two-layer flow; *b* — four-layer flow

В целом полученные карты изолиний критерия Ричардсона соответствуют физическим представлениям о зонах локальной устойчивости в контрвихревом потоке.

ВЫВОДЫ

1. В статье рассмотрено теоретическое исследование гидродинамики контрвихревых течений с движущимися по цилиндрической трубе коаксиальными вращающимися в противоположных направлениях слоями. Такие течения в турбулентном диапазоне имеют большой потенциал применения в технологиях смешивания неоднородных сред, а также в целях гашения избыточной механической энергии потоков жидкостей или газов. Эффективное развитие указанных технологий невозможно без знания гидродинамики таких течений. Помимо сказанного, такие течения наблюдаются в отсасывающих трубах гидротурбин Френсиса при неноминальных режимах их работы. Это при недостаточном знании физики таких потоков неоднократно являлось причиной аварий на крупных гидроэлектростанциях.

2. Статья является продолжением работ, указанных в тексте и посвященных описанию кинематической структуры исследуемого контрвихревого течения. В данных работах получены математические описания радиально-аксиальных распределений тангенциальных, аксиальных и радиальных скоростей в контрвихревых течениях, а также функции тока и компонент вихрей, представляющие собой ряды или произведения

рядов Фурье – Бесселя. В целом кинематическая структура потоков со взаимодействующими противоположно закрученными слоями характеризуется высокими радиальными и продольными градиентами тангенциальных и аксиальных скоростей. Это отражается на действующих внутренних силовых полях, определяемых тензором вязких напряжений.

3. В соответствии с распределениями тангенциальных, аксиальных и радиальных скоростей, в работе получены радиально-аксиальные распределения вязких касательных ($\tau_{r\theta}$, $\tau_{\theta r}$, $\tau_{x\theta}$) и нормальных (σ_{xx} , $\sigma_{\theta\theta}$, σ_{rr}) напряжений. В начальной стадии взаимодействия противоположно закрученных слоев в створах на расстоянии до $x = 5R$ от входного сечения активной зоны, как и следовало ожидать, все вязкие касательные ($\tau_{ij} = \tau_{ji}$) и нормальные (σ_{ii}) напряжения имеют максимальные значения. Причем эти напряжения, достигающие $\tau_{x\theta}/\mu = \tau_{r\theta}/\mu = \pm 125$ нормированных единиц, имеют место во внутренних слоях контрвихревых течений. Несомненно, это результат жесткого вязкого взаимодействия противоположно закрученных слоев. Это кардинально отличает контрвихревые потоки от потоков закрученных, где аналогичные напряжения наблюдаются только в вихревом шнуре на геометрической оси трубы, и от равномерных осевых потоков Пуазейля – Гагена, где касательные напряжения малы и составляют $\tau_{x\theta}/\mu = \tau_{r\theta}/\mu = \pm 4$ нормированных единиц.

4. В толще исследуемых течений наблюдается частая смена знака у всех компонент тензора вязких напряжений кроме $\sigma_{\theta\theta}$. Это интенсифицирует подавление закрутки взаимодействующих слоев и способствует тенденции к потере устойчивости ламинарного течения и переходу его в турбулентное с высокой интенсивностью процессов энергетического и молярного обмена между взаимодействующими слоями.

5. Под гидродинамической устойчивостью в работе понимается способность течения подавлять возмущения, возникающие в нем. Под потерей гидродинамической устойчивости соответственно — неспособность течения подавлять возникающие в нем возмущения. При потере гидродинамической устойчивости прежнее течение переходит в иное более устойчивое течение. Этот переход от одного движения к другому может происходить в различной форме, например, в форме ламинарно-турбулентной трансформации или в форме «развала» контрвихревого течения, в англоязычной литературе называемого «vortex breakdown», с трансформацией его в осевой поток.

6. Для определения зон локальной устойчивости использованы критерии Рэлея (Ra) и Ричардсона (Ri). Установлено, что оценку местной (локальной) устойчивости течения можно получить из критерия Ричардсона (Ri), равного числу Рэлея (Ra), деленному на квадратичный инвариант тензора вязких напряжений (его другое название квадратичный инвариант тензора скоростей деформации) J^2 . Установлено, если в некой локальной области потока число Ричардсона больше единицы ($Ri > 1$), то течение здесь будет устойчивым, а возникающие в нем стохастические возмущения будут подавляться, но если число Ричардсона существенно меньше нуля ($Ri \ll 0$), то течение в этой области неизбежно потеряет устойчивость.

7. Гидродинамическая устойчивость контрвихревых течений сохраняется только в толще противоположно закрученных слоев, за пределами границ их вязкого трения. По мере продвижения течения вдоль активной зоны границы вязкого трения смежных противоположно закрученных слоев расширяются, что приводит к разрушению областей течения, сохраняющих гидродинамическую устойчивость. В двухслойном течении на выходе из активной зоны сохраняются обе области с устойчивым течением, которые были и на входе в нее, а в четырехслойном течении с более интенсивным вязким трением смежных противоположно закрученных слоев из четырех областей с устойчивым течением остается лишь одна.

8. Установлено, что области с неустойчивым течением локализуются вдоль твердых границ потока и вдоль границ контакта между взаимодействующими противоположно вращающимися слоями. Однако, вихревое ядро, окружающее геометрическую ось потока, обладает наиболее неустойчивым течением. В верхних слоях ядра расположена зона слабой неустойчивости с числами Ричардсона до $Ri = -1$, ниже нее (ближе к центру потока) лежит зона дестабилизации течения с числами Ричардсона Ri от -10 до -100 , примыкает к геометрической оси потока зона с быстро нарастающей неустойчивостью до значений $Ri = -1000$. Это зона потери устойчивости с «кризисом течения», завершающимся «распадом» контрвихревого течения и трансформацией его в осевой поток.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кривченко Г.И., Квятковская Е.В., Мордасов А.П., Волишник В.В., Зуйков А.Л. Высоконапорная водобросная система с контрвихревым гасителем энергии потока воды // Гидротехническое строительство. 1981. № 10. С. 29–31.

2. Карелин В.Я., Кривченко Г.И., Мордасов А.П., Волианик В.В., Зуйков А.Л., Ахметов В.К. Физическое и математическое моделирование систем гашения энергии в вихревых водосбросах // Физическое и математическое моделирование гидравлических процессов при исследовании крупных гидроузлов комплексного назначения «МГ–89»: тез. науч.-техн. сов., г. Дивногорск, 1989. Л.: Изд-во ВНИИГ им. Б.Е. Веденеева, 1989. С. 11–12.
3. Волианик В.В., Орехов Г.В. Области применения взаимодействующих закрученных потоков жидкостей и газов // Вестник МГСУ. 2015. № 7. С. 87–104. DOI: 10.22227/1997-0935.2015.7.87-104
4. Volshanik V., Orekhov G. Substantiation of countervortex spillway structures of hydrotechnical facilities // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. 2018. Vol. 1. Issue 8 (91). Pp. 24–32. DOI: 10.15587/1729-4061.2018.123918
5. Zhou M., Bai D., Zong Y., Zhao L., Thornock J.N. Numerical investigation of turbulent reactive mixing in a novel coaxial jet static mixer // Chemical Engineering and Processing: Process Intensification. 2017. Vol. 122. Pp. 190–203. DOI: 10.1016/j.cep.2017.09.017
6. Guo J., Yan Y., Liu W., Jiang F., Fan A. Enhancement of laminar convective heat transfer relying on excitation of transverse secondary swirl flow // International Journal of Thermal Sciences. 2015. Vol. 87. Pp. 199–206. DOI: 10.1016/j.ijthermalsci.2014.08.023
7. Hanada T., Sawamoto T., Takahashi K. In-line mixing for high reactive species using swirl flow ejector // Theoretical Foundations of Chemical Engineering. 2016. Vol. 50. Issue 6. Pp. 932–936. DOI: 10.1134/S0040579516060063
8. Kravtsov Z.D., Sharaborin D.K., Dulin V.M. Swirl effect on flow structure and mixing in a turbulent jet // Journal of Physics: Conference Series. 2018. Vol. 980. Issue 1. P. 012001. DOI: 10.1088/1742-6596/980/1/012001
9. Parra T., Perez R., Lorenzo G., Szasz R., Gutkowski A., Castro F. Diffuser influence on the mixing of coaxial swirling jets // ASME FEDSM2014-21354. 2014. DOI: 10.1115/FEDSM2014-21354
10. Ахметов В.К. Гидродинамическая устойчивость контрвихревых течений // Гидротехническое строительство. 2018. № 2. С. 13–18.
11. Ахметов В.К., Ахметова В.В. Асимптотические решения уравнения для возмущения в задачах гидродинамической устойчивости закрученных потоков // Вопросы прикладной математики и вычислительной механики: сб. тр. № 20. М., 2017. С. 121–127.
12. Ахметов В.К., Ахметова В.В. Численный метод расчета собственных значений в задачах устойчивости закрученных потоков // Естественные и технические науки. 2017. № 10 (112). С. 134–135.
13. Ахметов В.К., Ахметова В.В. Математическое моделирование гидродинамики и устойчивости соосно вращающихся потоков // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2016. Т. 12. № 3. С. 9–14.
14. Ахметов В.К., Шкадов В.Я. Устойчивость свободных и ограниченных закрученных течений с зонами рециркуляции // Инженерная физика. 2008. № 6. С. 6–13.
15. Куликов Д.В., Миккельсен Р., Наумов И.В., Окулов В.А. Диагностика пузырьвидного распада вихря в закрученном течении в цилиндре большого удлинения // Письма в Журнал технической физики. 2014. Т. 40. № 4. С. 87–94.
16. Актериев С.П., Куйбин П.А. Устойчивость осесимметричных закрученных течений вязкой несжимаемой жидкости // Теплофизика и аэромеханика. 2013. Т. 20. № 3. С. 325–334.
17. Зуйков А.Л. Гидродинамика циркуляционных течений. М.: Изд-во АСВ, 2010. 216 с.
18. Kudo M., Nakazawa T., Takahashi M., Sato K., Nishibe K. Control of flow instabilities in swirl flow generator // Japanese Journal of Multiphase Flow. 2014. Vol. 27. Issue 5. Pp. 623–630. DOI: 10.3811/jjmf.27.623
19. Nishibe K., Sato K., Tsujimoto Y., Yoshiki H. Control of flow instabilities downstream of radial inlet guide vanes // Journal of Fluid Science and Technology. 2011. Vol. 6. Issue 4. Pp. 651–661. DOI: 10.1299/jfst.6.651
20. Javadi A., Nilsson H. Active flow control of the vortex rope and pressure pulsations in a swirl generator // Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics. 2017. Vol. 11. Issue 1. Pp. 30–41. DOI: 10.1080/19942060.2016.1235515
21. Javadi A., Bosioc A., Nilsson H., Muntean S., Susan-Resiga R. Experimental and numerical investigation of the precessing helical vortex in a conical diffuser, with rotor–stator interaction // Journal of Fluids Engineering. 2016. Vol. 138. Issue 8. P. 081106. DOI: 10.1115/1.4033416
22. Javadi A., Nilsson H. LES and DES of strongly swirling turbulent flow through a suddenly expanding circular pipe // Computers & Fluids. 2015. Vol. 107. Pp. 301–313. DOI: 10.1016/j.compfluid.2014.11.014
23. Javadi A., Nilsson H. Time-accurate numerical simulations of swirling flow with rotor–stator interaction // Flow, Turbulence and Combustion. 2015. Vol. 95. Issue 4. Pp. 755–774. DOI: 10.1007/s10494-015-9632-2
24. Javadi A., Nilsson H. LES and DES of swirling flow with rotor–stator interaction // Progress in Hybrid RANS-LES Modelling. 2015. Vol. 130. Pp. 457–468. DOI: 10.1007/978-3-319-15141-0_37

25. Rudolf P., Litera J., Bolanos G., Stefan D. Manipulation of the swirling flow instability in hydraulic turbine diffuser by different methods of water injection // EPJ Web of Conferences. 2018. Vol. 180. P. 02090. DOI: 10.1051/epjconf/201818002090
26. Stefan D., Rudolf P. Proper orthogonal decomposition of pressure fields in a draft tube cone of the Francis (Tokke) turbine model // Journal of Physics: Conference Series. 2015. Vol. 579. P. 012002. DOI: 10.1088/1742-6596/579/1/012002
27. Petit O., Bosioc A.I., Nilsson H., Muntean S., Susan-Resiga R. Unsteady simulations of the flow in a swirl generator, using OpenFOAM // International Journal of Fluid Machinery and Systems. 2011. Vol. 4. Issue 1. Pp. 199–208. DOI: 10.1155/2013/961580
28. Stefan D., Rudolf P., Muntean S., Susan-Resiga R. Proper orthogonal decomposition of self-induced instabilities in decelerated swirling flows and their mitigation through axial water injection // Journal of Fluids Engineering. 2017. Vol. 139. Issue 8. P. 081101. DOI: 10.1115/1.4036244
29. Rudolf P., Stefan D., Klas R. Spatio-temporal description of the swirling flow in hydraulic turbine draft tube // Wasserwirtschaft. 2015. Vol. 105. Issue 13. Pp. 18–22. DOI: 10.1007/s35147-015-0511-5
30. Zyikov A., Orekhov G., Suehtina T. Structure of laminar flows with oppositely-rotating coaxial layers // MATEC Web of Conferences. 2018. Vol. 193. P. 02024. DOI: 10.1051/mateconf/201819302024
31. Korn G.A., Korn T.M. Mathematical handbook for scientists and engineers: definitions, theorems, and formulas for reference and review. General Publishing Company, 2000. 1151 p.

Поступила в редакцию 29 марта 2019 г.

Принята в доработанном виде 20 мая 2019 г.

Одобрена для публикации 26 июня 2019 г.

О Б АВТОРАХ: Андрей Львович Зуйков — доктор технических наук, доцент кафедры гидравлики и гидротехнического строительства; **Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ);** 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; профессор кафедры гидравлики; **Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ);** 125319, г. Москва, Ленинградский пр-т, д. 64; ZuykovAL@mgsu.ru;

Елена Витальевна Бажина — кандидат технических наук, доцент кафедры гидравлики и гидротехнического строительства; **Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ);** 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; BazhinaEV@mgsu.ru.

REFERENCES

1. Krivchenko G.I., Mordasov A.P., Kvyatkovskaya E.V., Volshanik V.V., Zuikov A.L. High-head Spillway System with Conterreddy Energy Dissipator. *Hydrotechnical Construction*. 1981; 10:29-31. (rus.).
2. Karelin V.Ya., Krivchenko G.I., Mordasov A.P., Volshanik V.V., Zuikov A.L., Akhmetov V.K. Physical and mathematical modeling of systems of energy dissipation in vortex spillways. *Physical and Mathematical Modeling of Hydraulic Processes in the Study of Large-Scale Multi-Purpose Hydro "MH-89": abstracts of Scientific and Technical Conference in Divnogorsk in 1989*. Leningrad, B.E. Vedenev VNIIG Publ., 1989; 11-12. (rus.).
3. Volshanik V.V., Orekhov G.V. Areas of use of interacting swirl liquid and gas flows. *Vestnik MGSU* [Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering]. 2015; 7:87-104. DOI: 10.22227/1997-0935.2015.7.87-104 (rus.).
4. Volshanik V., Orekhov G. Substantiation of countervortex spillway structures of hydrotechnical facilities. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2018; 1:8(91):24-32. DOI: 10.15587/1729-4061.2018.123918
5. Zhou M., Bai D., Zong Y., Zhao L., Thornock J.N. Numerical investigation of turbulent reactive mixing in a novel coaxial jet static mixer. *Chemical Engineering and Processing: Process Intensification*. 2017; 122:190-203. DOI: 10.1016/j.cep.2017.09.017
6. Guo J., Yan Y., Liu W., Jiang F., Fan A. Enhancement of laminar convective heat transfer relying on excitation of transverse secondary swirl flow. *International Journal of Thermal Sciences*. 2015; 87:199-206. DOI: 10.1016/j.ijthermalsci.214.08.23

7. Hanada T., Sawamoto T., Takahashi K. In-line mixing for high reactive species using swirl flow ejector. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*. 2016; 50(6):932-936. DOI: 10.1134/s0040579516060063
8. Kravtsov Z.D., Sharaborin D.K., Dulin V.M. Swirl effect on flow structure and mixing in a turbulent jet. *Journal of Physics: Conference Series*. 2018; 980:012001. DOI: 10.1088/1742-6596/980/1/012001
9. Parra T., Perez R., Lorenzo G., Szasz R., Gutkowski A., Castro F. Diffuser influence on the mixing of coaxial swirling jets. *ASME FEDSM2014-21354*. 2014. DOI: 10.1115/FEDSM2014-21354
10. Akhmetov V.K. Hydrodynamic stability of conter vortex flow. *Hydrotechnical Construction*. 2018; 2:13-18. (rus.).
11. Akhmetov V.K., Akhmetova V.V. Asymptotic solutions of equations for perturbations in problems of hydrodynamic stability of swirling flows. *Questions of applied mathematics and computational mechanics. Collection of works number 20*. Moscow, 2017; 121-127. (rus.).
12. Akhmetov V.K., Akhmetova V.V. Numerical method for calculating eigenvalues for stability problems of swirling flows. *Natural and Technical Sciences*. 2017; 10(112):134-135. (rus.).
13. Akhmetov V.K., Akhmetova V.V. Mathematical modeling of hydrodynamics and stability of coaxially rotating flows. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2016; 12(3):9-14. (rus.).
14. Akhmetov V.K., Shkadov V.Ya. Stability of free and bounded swirling flows with recirculation zones. *Engineering Physics*. 2008; 6:6-13. (rus.).
15. Kulikov D.V., Mikkelsen R., Naumov I.V., Okulov V.A. The diagnosis of a bubble vortex decay in a swirling flow in a cylinder of high elongation. *Letters to the Journal of Technical Physics*. 2014; 40(4):87-94. (rus.).
16. Aktershev S.P., Kuibin P.A. Stability of axisymmetric swirling flows of a viscous incompressible fluid. *Thermal physics and aeromechanics*. 2013; 20(3):325-334. (rus.).
17. Zuikov A.L. *Hydrodynamics of circulating currents*. Moscow, Publisher Association of Building Institutions of Higher Education, 2010; 216. (rus.).
18. Kudo M., Nakazawa T., Takahashi M., Sato K., Nishibe K. Control of flow instabilities in swirl flow generator. *Japanese Journal of Multiphase Flow*. 2014; 27(5):623-630. DOI: 10.3811/jjmf.27.623
19. Nishibe K., Sato K., Tsujimoto Y., Yoshiki H. Control of flow instabilities downstream of radial inlet guide vanes. *Journal of Fluid Science and Technology*. 2011; 6(4):651-661. DOI: 10.1299/jfst.6.651
20. Javadi A., Nilsson H. Active flow control of the vortex rope and pressure pulsations in a swirl generator. *Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics*. 2017; 11(1):30-41. DOI: 10.1080/19942060.2016.1235515
21. Javadi A., Bosioc A., Nilsson H., Muntean S., Susan-Resiga R. Experimental and numerical investigation of the precessing helical vortex in a conical diffuser, with rotor–stator interaction. *Journal of Fluids Engineering*. 2016; 138(8):081106. DOI: 10.1115/1.4033416
22. Javadi A., Nilsson H. LES and DES of strongly swirling turbulent flow through a suddenly expanding circular pipe. *Computers & Fluids*. 2015; 107:301-313. DOI: 10.1016/j.compfluid.2014.11.014
23. Javadi A., Nilsson H. Time-accurate numerical simulations of swirling flow with rotor-stator interaction. *Flow, Turbulence and Combustion*. 2015; 95(4):755-774. DOI:10.1007/s10494-015-9632-2
24. Javadi A., Nilsson H. LES and DES of swirling flow with rotor-stator interaction. *Progress in Hybrid RANS-LES Modelling*. 2014; 130:457-468. DOI: 10.1007/978-3-319-15141-0_37
25. Rudolf P., Litera J., Bolanos G., Stefan D. Manipulation of the swirling flow instability in hydraulic turbine diffuser by different methods of water injection. *EPJ Web of Conferences*. 2018; 180:02090. DOI: 10.1051/epjconf/201818002090
26. Stefan D., Rudolf P. Proper orthogonal decomposition of pressure fields in a draft tube cone of the Francis (Tokke) turbine model. *Journal of Physics: Conference Series*. 2015; 579:012002. DOI: 10.1088/1742-6596/579/1/012002
27. Petit O., Bosioc A.I., Nilsson H., Muntean S., Susan-Resiga R. Unsteady simulations of the flow in a swirl generator, using OpenFOAM. *International Journal of Fluid Machinery and Systems*. 2011; 4(1):199-208. DOI: 10.1155/2013/961580
28. Stefan D., Rudolf P., Muntean S., Susan-Resiga R. Proper orthogonal decomposition of self-induced instabilities in decelerated swirling flows and their mitigation through axial water injection. *Journal of Fluids Engineering*. 2017; 139(8):081101. DOI: 10.1115/1.4036244
29. Rudolf P., Stefan D., Klas R. Spatio-temporal description of the swirling flow in hydraulic turbine draft tube. *Wasserwirtschaft*. 2015; 105(13):18-22. DOI: 10.1007/s35147-015-0511-5
30. Zyikov A., Orekhov G., Suehtina T. Structure of laminar flows with oppositely-rotating coaxial layers. *MATEC Web of Conferences*. 2018; 193:02024. DOI: 10.1051/matecconf/201819302024
31. Korn G.A., Korn T.M. *Mathematical handbook for scientists and engineers: definitions, theorems, and formulas for reference and review*. General Publishing Company, 2000; 1151.

Received March 29, 2019

Adopted in a modified form on May 20, 2019.

Approved for publication June 26, 2019

B I O N O T E S: **Andrey L. Zuikov** — Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Hydraulics and Hydraulic Engineering; **Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (MGSU)**; 26 Yaroslavskoe shosse, Moscow, 129337, Russian Federation; Professor of the Department of Hydraulics; **Moscow Automobile and Road Construction State Technical University (MADI)**; 64 Leningradsky prospect, Moscow, 125319, Russian Federation; ZuykovAL@mgsu.ru;

Elena V. Bazhina — Candidate of Technical Sciences, Assistant professor of the Department of Hydraulics and Hydraulic Engineering; **Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (MGSU)**; 26 Yaroslavskoe shosse, Moscow, 129337, Russian Federation; BazhinaEV@mgsu.ru.