Математический аппарат для определения термического сопротивления однородной скалярной среды

Т.А. Мусорина, Д.Д. Заборова, М.Р. Петриченко

*Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого (СПбПУ);
г. Санкт-Петербург, Россия*

АННОТАЦИЯ

Введение: предложен метод определения термического сопротивления областей малой и большой размерности (одномерная и многомерная задачи) стенового ограждения. Предмет исследования — термическое сопротивление однородной скалярной среды (однородное стеновое ограждение). Цель — определение термического сопротивления стеновой конструкции для областей произвольной размерности (по координатам x_i , $1 \leq i \leq d$, d — размерность области), заполненных скалярной (однородной и изотропной) теплопроводной средой.

Материалы и методы: использованы физические законы: закон Фурье (величина теплового потока при переносе тепла с помощью теплопроводности); условие неразрывности для теплового потока, приводящее к уравнению теплопроводности.

Результаты: данный метод расширяет стандартное определение термического сопротивления. Доказывается, что при увеличении размерности области (например, при переходе от тонкой оболочки или пластины к прямоугольнику с длиной и шириной одного порядка) активное термическое сопротивление не возрастает. В этом состоит смысл геометрического включения, т.е. увеличения размерности области, заполненной однородной изотропной средой. Получены явные выражения для определения активного, реактивного и суммарного термического сопротивления. Доказано, что суммарное сопротивление больше активного сопротивления, за счет того, что реактивное сопротивление положительно и стенка обладает способностью гасить температурные колебания и накапливать/отдавать тепло.

Выводы: появление дополнительной размерности стенки (сравнимое отношение длины к толщине) не увеличивает ее активного сопротивления. В общем случае суммарное термическое сопротивление превосходит активное сопротивление не более чем в четыре раза. Геометрические включения необходимо учитывать при расчете стеновых ограждений, отличных от одномерных тел.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: энергоэффективность, строительство, термическое сопротивление, скалярная среда, ограждающие конструкции, математический аппарат, геометрические включения

ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ: Мусорина Т.А., Заборова Д.Д., Петриченко М.Р. Математический аппарат для определения термического сопротивления однородной скалярной среды // Вестник МГСУ. 2019. Т. 14. Вып. 8. С. 1037–1045. DOI: 10.22227/1997-0935.2019.8.1037-1045

Mathematical apparatus for determination of homogenous scalar medium thermal resistance

Tatiana A. Musorina, Daria D. Zaborova, Michail R. Petritchenko

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University (SPbPU); St. Petersburg, Russian Federation

ABSTRACT

Introduction: the article suggests a method for determining a thermal resistance of small and large-sized areas (one-dimensional and multidimensional problems) of wall enclosure. The subject of the study is the thermal resistance of homogeneous scalar medium (homogeneous wall enclosure). The aim is the determination of thermal resistance of a wall structure for areas of arbitrary dimension (by the coordinates x_i , where $1 \leq i \leq d$ and d is the area dimension) filled with a scalar (homogeneous and isotropic) heat-conducting medium.

Materials and methods: the article used the following physical laws: Fourier law (the value of the heat flow when transferring heat through thermal conductivity) and continuity condition for the heat flow rate leading to the thermal conductivity equation.

Results: this method extends the standard definition of thermal resistance. The research proved that the active thermal resistance does not increase with increasing of the area dimension (for example, when switching from a thin shell or plate to a rectangle with length and width of the same order of magnitude). That is the sense of geometric inclusion, i.e., increase of the dimension of an area filled with a homogeneous isotropic medium. Evident expressions are obtained for the determination of active, reactive, and total thermal resistance. It is proved that the total resistance is higher than the active resistance since the reactive resistance is positive, and the wall possesses an ability to suppress the temperature fluctuations and accumulate/give up the heat.

Conclusions: the appearance of an additional wall dimension (comparable length-to-thickness ratio) does not increase its active resistance. In the general case, the total thermal resistance exceeds the active thermal resistance no more than four times. Geometric inclusions must be considered in the calculation of wall enclosures that are variant from one-dimensional bodies.

KEYWORDS: energy efficiency, construction, thermal resistance, scalar medium, enclosures, mathematical apparatus, geometric inclusions

FOR CITATION: Musorina T.A., Zaborova D.D., Petritchenko M.R. Mathematical apparatus for determination of homogenous scalar medium thermal resistance. *Vestnik MGSU* [Monthly Journal on Construction and Architecture]. 2019; 14(8):1037-1045. DOI: 10.22227/1997-0935.2019.8.1037-1045 (rus.).

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время основное внимание уделяется конструктивно-технологическим мероприятиям, направленным на увеличение термического сопротивления ограждений. Мероприятия по повышению термического сопротивления стеновой конструкции требуют оценок термической устойчивости стены. Показано, что повышенное термическое сопротивление теплопроводности не всегда обеспечивает стационарность температур граней стены [1].

Повышение термического сопротивления ограждающих конструкций жилых зданий может осуществляться двумя основными способами: использование строительных систем, включающих функциональные слои различного назначения (навесной вентилируемый фасад), и использование эффективных теплоизоляционных конструктивных материалов. Первый способ достаточно широко применяется в строительстве — это многослойные конструкции с несущей частью, теплоизоляционным слоем, воздушной прослойкой и облицовкой, однако они имеют ряд недостатков, таких как сложность конструкции, долговечность и экологичность (некоторых строительных материалов). На фоне этого значительный интерес представляет второй способ, а именно использование конструктивно-теплоизоляционных материалов в однослойных ограждающих элементах без дополнительного применения теплоизоляционных материалов. На сегодняшний день стеновые блоки из газобетона разной марки по средней плотности — искусственный каменный материал, позволяющий возводить однослойные ограждающие конструкции с требуемыми нормами по термическому сопротивлению теплопередачи без дополнительного утепления при обеспечении физико-механических свойств, согласно современным требованиям строительства. Повы-

шение термического сопротивления ведет к удорожанию строительства.

В.Г. Гагариным доказывается, что практически все мероприятия по энергосбережению в зданиях сводятся к увеличению требуемого сопротивления теплопередаче ограждающих конструкций. Современные нормативные значения теплотехники стен достигли величин, которые трудновыполнимы на практике и дальнейшее их увеличение не приведет к повышению энергоэффективности. Из работы также следует, что при понижении нормативного сопротивления в районе единицы это мало влияет на изменение теплопотерь через ограждающие конструкции, при условии выполнения норматива по удельному расходу энергии на отопление [2].

В статье [3] обсуждается расчет активного термического сопротивления слоистых стеновых ограждений. Приводятся основы разработки конструкций стен с большим термическим сопротивлением и отсутствием конденсации водяного пара внутри стены. Определение термического сопротивления производится для одномерной схемы распространения теплоты.

В работах К.П. Зубарева и В.Г. Гагарина предложен нестационарный метод расчета влажностного режима однослойных ограждающих конструкций с помощью дискретно-континуального метода. Доказано, что предложенный метод дает более близкий результат к расчету влажностного режима численным методом по нестационарной модели В.Г. Гагарина по сравнению с известной аналитической квазистационарной моделью В.В. Козлова [4–5].

Специально изучается влияние инородных (металлических) включений, их формы и расположения внутри стены, на величину теплового потока сквозь стену [6]. Очевидно, всякое инородное включение приводит к дифракции линий тока вблизи включения, искажающей одномерный характер распространения тепла.

Также большое количество трудов посвящено микроклимату помещений [7–12]. В работах С.В. Корниенко [13–14] сделан вывод о том, что повышение требований по влагозащите ограждающих конструкций при использовании расчетных значений температуры и относительной влажности внутреннего воздуха, согласно российской норме СП 50.13330.2012, не всегда целесообразно. Учет изменения параметров микроклимата в помещениях позволяет более точно оценить влагозащитные свойства ограждающих конструкций в процессе их проектирования.

Влияние включения учитывается введением в исходный вид формулы Фурье для одномерного потока теплоты $q = \frac{\Delta T}{\mathfrak{R}_a}$, корректирующего множителя, учитывающего включение. Таким образом, *включение трактуется как фактор, искажающий одномерное распространение теплоты*. Аналогично и увеличение размерности области строительного ограждения, занятой теплопроводной средой, можно трактовать как *геометрическое включение*.

Нестационарные режимы передачи теплоты рассматриваются в рамках классических предельных задач теплопроводности [15–18]. Реакция ограждения на изменение предельных температур проявляется в тепловой инерции стены и в регенерации теплоты стеной. Поэтому наряду с активным термическим сопротивлением стена обладает и реактивным термическим сопротивлением. Реактивное термическое сопротивление необходимо учитывать при нестационарных термических состояниях среды.

Цель статьи — определение термического сопротивления стеновой конструкции для областей произвольной размерности (по координате x, y), заполненных скалярной (однородной и изотропной) теплопроводной средой.

Необходимо решить задачи:

1. Определение сопротивления одномерного потока (одномерная задача) для однородного изотропного теплопроводимого стенового ограждения в условиях стационарного и нестационарного термического воздействия на стену.

2. Определить сопротивление для стены большой размерности в условиях пункта 1.

Будет доказано, что при неизменных предельных (граничных) условиях термическое сопротивление не увеличивается при увеличении размерности области.

В строительной теплотехнике важную роль играет понятие (активного) термического сопротивления стены как меры термического качества стены в условиях стационарного температурно-

го режима [1–5]. Эта величина определяется для плоской стены как счетно-аддитивная функция

$\mathfrak{R}_a = \int_0^h \frac{dy}{\lambda(y)}$, где h — толщина стены, плотность распределения термического сопротивления $1/\lambda$. Для слоистой стены непрерывное распределение заменяется дискретным (ступенчатым) распределением $\mathfrak{R}_a = \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i}$, $\sum_{i=1}^n \delta_i = h$, $\delta_i, i = 1(1)n$ — толщина i -го

слоя, имеющего коэффициент теплопроводности λ_i . Очевидно, активное термическое сопротивление стены не зависит от чередования слоев; распределение же температуры по толщине стены зависит от распределения $\lambda = \lambda(y)$ коэффициента теплопроводности. Пусть $T_1 := T(h) < T < T_0 := T(0)$, где z — переменная интегрирования, $y = h$. Тогда скорость распределения равна:

$$\vartheta(y) := \frac{T_0 - T}{T_0 - T_1} = \frac{\int_0^y dz / \lambda(z)}{\int_0^h dz / \lambda(z)}.$$

Среднее значение температурного напора $\vartheta(y)$, ϑ_m по толщине стены, составит:

$$\begin{aligned} \vartheta_m &:= \frac{T_0 - T_m}{T_0 - T_1} = \frac{1}{h} \frac{\int_0^h dz (h - z) / \lambda(z)}{\int_0^h dz / \lambda(z)} = \\ &= 1 - \frac{1}{h} \frac{\int_0^h z dz / \lambda(z)}{\int_0^h dz / \lambda(z)} < 1. \end{aligned}$$

Тогда, средняя температура по стенке, ϑ_m , достигает максимума, если

$$\vartheta_m = \frac{1}{h} \frac{\int_0^h z dz / \lambda(z)}{\int_0^h dz / \lambda(z)} \rightarrow 1 - 0,$$

т.е., при z/h близком к 1, $\lambda(z) \ll 1$. Иначе, для увеличения средней температуры стены достаточно слои с низкой теплопроводностью размещать вблизи «холодной» грани стены.

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

1. Рассмотрим одномерную стенку, $\dim E = 1$. Однородная стена толщиной h обладает активным термическим сопротивлением h/λ в условиях одномерного стационарного теплового потока. На рис. 1 показана схема одномерной стены, стилизованной неограниченной полосой $-\infty < x < \infty$, $0 < y < h$.

Рис. 1. Схема стены

Fig. 1. The scheme of the wall

Локальное (по координате y) определение термического сопротивления R_i теплового потока имеет вид:

$$\mathfrak{R}_i := \frac{\delta T}{\delta q_i}, \quad i = 1, 2, 3;$$

где δT — (полное) изменение температуры

$\delta T = \frac{\partial T}{\partial t} \delta t + \frac{\partial T}{\partial y_i} \delta y_i = \frac{\partial T}{\partial t} \delta t + (\nabla T, \delta y)$, символ δ определяет приращение, в том числе и бесконечно малое, (a, b) — скалярное произведение, $\delta \mathbf{x} = \text{str}(\delta x_i)_1^d$, $d := \dim E$.

Тогда для одномерного потока теплоты с двумя степенями свободы, t, y , опуская нижний значок, i , получим:

$$\mathfrak{R} := \frac{\delta T}{\delta q} = \frac{A \delta t + B \delta y}{C \delta t + D \delta y}.$$

То есть как изменение δT температуры при изменении плотности теплового потока на δq . Введены такие обозначения для частных производных, нижний значок означает фиксируемую степень свободы:

$$A := \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_y = \frac{\partial(T, y)}{\partial(t, y)}, B := \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_t = \frac{\partial(T, t)}{\partial(y, t)};$$

$$C := \left(\frac{\partial q}{\partial t} \right)_y = \frac{\partial(q, y)}{\partial(t, y)}, D := \left(\frac{\partial q}{\partial t} \right)_t = \frac{\partial(q, t)}{\partial(y, t)}.$$

Активное термическое сопротивление определяется так:

$$\mathfrak{R}_a := \frac{B}{D} = \frac{\partial(T, t)}{\partial(q, t)} = \left(\frac{\partial T}{\partial q} \right)_t,$$

причем для определения деривативов используется символика Дюгема. Пусть $z = z(x, y)$. Тогда частные деривативы $(\partial z / \partial x)_y, (\partial z / \partial y)_x$ определяются в виде якобианов: $(\partial z / \partial x)_y = \partial(z, y) / \partial(x, y)$, $(\partial z / \partial y)_x = \partial(z, x) / \partial(y, x)$.

Реактивное термическое сопротивление определяется как разность полного сопротивления $\mathfrak{R}$ и активного сопротивления и характеризует не-

стационарные процессы передачи теплоты. Реактивное термическое сопротивление характеризует тепловую емкость и тепловую инерцию среды на прохождение нестационарного теплового потока:

$$\mathfrak{R}_r := \mathfrak{R} - \mathfrak{R}_a = \frac{AD - BC}{D(C + wD)}, \quad w := \frac{\delta y}{\delta t}.$$

где w — параметр, имеющий размерность скорости. Очевидно, $\delta y / \delta t = 0$, поскольку t, y — независимые переменные тогда $w = 0$. Это тождество можно доказать строго. Поскольку $y = y(T, q)$, то:

$$\begin{aligned} \frac{\delta y}{\delta t} &:= \left(\frac{\partial y}{\partial T} \right)_q \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_y + \left(\frac{\partial y}{\partial q} \right)_T \left(\frac{\partial q}{\partial t} \right)_y = \\ &= \frac{\partial(y, q)}{\partial(T, q)} \frac{\partial(T, y)}{\partial(t, y)} + \frac{\partial(y, T)}{\partial(q, T)} \frac{\partial(q, y)}{\partial(t, y)} = \\ &= - \left(\frac{\partial y}{\partial q} \right)_T \left(\frac{\partial q}{\partial t} \right)_y - \left(\frac{\partial y}{\partial T} \right)_q \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_y = - \frac{\delta y}{\delta t}. \end{aligned}$$

Значит, $\delta y / \delta t = 0$, что и требовалось доказать. Поэтому выражение для реактивного сопротивления принимает вид:

$$\mathfrak{R}_r = \frac{A}{C} - \frac{B}{D} = \frac{(\partial T / \partial t)_y}{(\partial q / \partial t)_y} - \mathfrak{R}_a,$$

откуда получается, что полное и реактивное сопротивление одномерного теплового потока определяются так:

$$\mathfrak{R} = \frac{\partial(T, y)}{\partial(q, y)} = \left(\frac{\partial T}{\partial q} \right)_y,$$

$$\mathfrak{R}_r = \left(\frac{\partial T}{\partial q} \right)_y - \left(\frac{\partial T}{\partial q} \right)_t. \quad (1)$$

Как видно, тождества (1) носят универсальный характер и никак не связаны с физическими допущениями о распространении теплоты в твердой среде. Таких допущений два.

Во-первых, выполняется условие неразрывности для теплового потока (следствие закона сохранения энергии):

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial y} = 0,$$

т.е., в принятых обозначениях, $\rho c_p A + D = 0$, где c_p — удельная изобарная теплоемкость, ρ — плотность. Тогда, в силу (1):

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_a &= - \frac{B}{\rho c_p A} = - \frac{(\partial T / \partial y)_t}{\rho c_p (\partial T / \partial t)_y} = \\ &= - \frac{1}{\rho c_p} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)_T^{-1} = \frac{1}{\rho c_p W_T}, \quad W_T := - \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)_T, \quad \text{т.е.} \\ \mathfrak{R}_a &= \frac{1}{\rho c_p W_T}, \end{aligned} \quad (2)$$

W_T — параметр скорости распространения изотермы (распределения температурного воздействия). Аналогично, из тождества (1) получается:

$$\mathfrak{R} = \frac{A}{C} = \frac{A}{B} \frac{B}{D} \frac{D}{C} = \frac{(\partial T / \partial t)_y}{(\partial T / \partial y)_t} \mathfrak{R}_a \frac{(\partial q / \partial y)_t}{(\partial q / \partial t)_y} = \mathfrak{R}_a \frac{(\partial y / \partial t)_T}{(\partial y / \partial t)_q} = \mathfrak{R}_a \frac{W_T}{W_q}. \quad (3)$$

где $W_q := -(\partial y / \partial t)_q$ — параметр скорости распространения теплового потока.

С учетом равенства (2) тождество (3) принимает вид:

$$\mathfrak{R} := \frac{1}{\rho c_p W_q}, \quad (4)$$

Второе физическое допущение — закон Фурье. Тогда, для однородной среды, $\mathfrak{R}_a = \delta_T / \lambda$, λ — коэффициент теплопроводности, δ_T — линейный масштаб, носитель температуры, например глубина проникновения температурной волны. В силу равенства (2): $W_T \delta_T / a = 1$, $a := \lambda / (\rho c_p)$ — коэффициент температуропроводности материала стены. Аналогично получим: $\frac{W_q \delta_q}{a} = 1$, δ_q — линейный масштаб, например, глубина проникновения теплового потока. С учетом сказанного, равенство (3) принимает вид:

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_a \frac{\delta_q}{\delta_T}.$$

Итак, условие $\mathfrak{R}_a \rightarrow \sup$ недостаточно для блокировки теплового потока в нестационарном режиме передачи теплоты через стеновое ограждение. Необходимо и достаточно $\mathfrak{R} \rightarrow \sup$, т.е. $W_q \ll W_T$ или, что тоже: $\delta_q \gg \delta_T$. Иначе говоря, глубина проникновения (затухания в толще ограждения) теплового потока должна быть существенно больше глубины проникновения температурной волны.

Определение линейных масштабов δ_T , δ_q производится так. Пусть $T = T(t, y)$ — убывающая по y ($y = h$), равномерно по t , где t — плотность распределения (температура). Тогда, по определению:

$$\delta_T := \frac{1}{T_0(t)} \int_0^\infty T(t, y) dy, \quad T_0(t) := T(t, 0); \quad \delta_T < h;$$

$$\delta_q := \frac{1}{q_0(t)} \int_0^\infty q(t, y) dy, \quad q(t, y) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y},$$

$$q_0(t) := q(t, 0) = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0}, \quad \delta_q < h,$$

Предполагается, что написанные интегралы существуют. Выражение для δ_q можно записать так:

$$\delta_q = \frac{T_0(t)}{(\partial T / \partial y)_{y=0}}.$$

Поэтому отношение δ_q / δ_T вычисляется по формуле:

$$\delta_q / \delta_T = \frac{T_0^2(t)}{(\partial T / \partial y)_{y=0} \int_0^\infty T(t, y) dy}. \quad (5)$$

Пусть $T(t, y) > 0$, как функция от y , интегрируема с квадратом на промежутке $y \in (0, \infty)$. Из неравенства Литтлвуда [19] следует:

$$T^2(t, y) \leq 4 \left| \frac{\partial T}{\partial y} \right| \int_0^y T(t, z) dz < 4 \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} \int_0^\infty T(t, y) dy,$$

и поэтому в силу равенства (5) справедлива такая верхняя оценка:

$$\delta_q / \delta_T \leq 4.$$

Следовательно, суммарное термическое сопротивление превосходит активное сопротивление не более, чем в четыре раза: $\mathfrak{R} / \mathfrak{R}_a \leq 4$; соответственно, частное $\mathfrak{R} / \mathfrak{R}_a \leq 3$.

Рассмотрим многомерную стенку для случая $d > 1$ (вторая задача). Пусть размерность области, занятой теплопроводной средой d , не меньше 1: $\dim E = d > 1$. В многомерном случае имеем d компонент теплового потока, причем локальное (по координате $x_i = y$, как в пункте 1) определение термического сопротивления q_i теплового потока имеет вид:

$$\mathfrak{R}_i := \frac{\delta T}{\delta q_i}, \quad i = 1, 2, 3,$$

где δT — (полное) изменение температуры

$\delta T = \frac{\partial T}{\partial t} \delta t + \frac{\partial T}{\partial x_i} \delta x_i = \frac{\partial T}{\partial t} \delta t + (\nabla T, \delta \mathbf{x})$, символ δ опережает приращение, в том числе и бесконечно малое, (a, b) — скалярное произведение, $\delta \mathbf{x} = \text{str}(\delta x_i)_1^d$, $d := \dim E$. Следовательно, например, $\delta x_1 = \delta y$, t — время, δq_i — изменение i -й компоненты плотности теплового потока.

Итак, в силу определения, термическое сопротивление i -й компоненты вектора плотности теплового потока $q = (q_i)$, $1 \leq i \leq d$:

$$\mathfrak{R}_i := \frac{A \delta t + B}{C_i \delta t + \Delta_i},$$

$$A := \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_x,$$

$$B := (\nabla T, \delta \mathbf{x}),$$

$$C_i := \left(\frac{\partial q_i}{\partial t} \right)_x,$$

$$\Delta_i := (\nabla q_i, \delta \mathbf{x}), \quad \nabla := \sum_{i=1}^d o_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

где Δ — скалярное произведение градиента i -го компонента теплового потока и изменение координаты; ∇T — градиент температуры; ∇q_i — градиента i -го компонента теплового потока, $1 \leq i \leq d$.

Справедливы следующие выражения:

$$\mathfrak{R}_i := \frac{A}{C_i} = \frac{\text{div} \mathbf{q}}{\rho C_p (\nabla q_i, \mathbf{W}_{q,i})}, \quad 1 \leq i \leq d, \quad (6)$$

$$\mathbf{W}_{q,i} := \sum_{j=1}^d \mathbf{o}_j \left(\frac{\partial x_j}{\partial t} \right)_{q_i},$$

где $\text{div} \mathbf{q} = \partial q_1 / \partial x_1 + \partial q_2 / \partial x_2 + \partial q_3 / \partial x_3$, и в одномерном случае $d = 1$ получается выражение (4). Для доказательства равенства (6) нужно учесть, что если $d > 1$, то условие неразрывности для потока теплоты принимает вид: $\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} + \text{div} \mathbf{q} = 0$, и что вдоль линии $q_i = \text{const}$, $\left(\frac{\partial q_i}{\partial t} \right)_x + (\nabla q_i, \mathbf{W}_{q,i}) = 0$.

Точно также, активное сопротивление для i -й компоненты теплового потока $(\mathfrak{R}_a)_i$ составит:

$$(\mathfrak{R}_a)_i = \frac{B}{\Delta_i} = \frac{(\nabla T, \delta \mathbf{x})}{(\nabla q_i, \delta \mathbf{x})}.$$

Тогда, отношение полного сопротивления к активному сопротивлению составит:

$$\frac{\mathfrak{R}_i}{(\mathfrak{R}_a)_i} = \frac{\text{div} \mathbf{q} (\nabla q_i, \delta \mathbf{x})}{\rho C_p (\nabla q_i, \mathbf{W}_{q,i}) (\nabla T, \delta \mathbf{x})} = \frac{\text{div} \mathbf{q}}{\rho C_p (\nabla T, \mathbf{W}_T)}.$$

Здесь $\mathbf{W}_T := \sum_{j=1}^d \mathbf{o}_j \left(\frac{\partial x_j}{\partial t} \right)_T$ — скорость движения

поверхности $T = \text{const}$.

РЕЗУЛЬТАТЫ

Термическое сопротивление тепловому потоку $\mathbf{q}$:

$$\mathfrak{R} := \frac{A \delta t + B}{C \delta t + \Delta},$$

$$A := \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_x, B := (\nabla T, \delta \mathbf{x}),$$

$$C := \left(\frac{\partial q}{\partial t} \right)_x = \sum_{i=1}^d n_i \frac{\partial q_i}{\partial t}, \Delta := (\nabla q, \delta \mathbf{x});$$

где $q := \sqrt{\sum_{i=1}^d q_i^2}$ — евклидова норма вектора $\mathbf{q}$. Очевидно: $\nabla q = (\mathbf{n}, \text{grad} \mathbf{q})$, где матрица $\text{grad} \mathbf{q}$ определена так: $\text{grad} \mathbf{q} := \begin{pmatrix} \nabla q_1 \\ \nabla q_2 \\ \nabla q_3 \end{pmatrix}$. В скалярной среде

матрица $\text{grad} \mathbf{q}$ симметрическая: $\text{grad} \mathbf{q} = (\text{grad} \mathbf{q})^T$.

Это свойство следует из закона Фурье и равенства вторых смешанных производных температуры по координатам.

Вектор $\mathbf{n}$ (расслоение единичных нормалей к поверхности $q = \text{const}$) определен так:

$$\mathbf{n} := \sum_{i=1}^d \mathbf{o}_i q_i / q = \sum_{i=1}^d \mathbf{o}_i n_i, n_i := q_i / q. \text{ Значит:}$$

$$\nabla q = \sum_{i=1}^d n_i \nabla q_i, (\nabla q, \delta \mathbf{x}) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^d n_i \frac{\partial q_i}{\partial x_j} \mathbf{o}_j \cdot \sum_{k=1}^d \delta x_k \mathbf{o}_k = \sum_{i,j=1}^d n_i \frac{\partial q_i}{\partial x_j} \delta x_j.$$

Применив неравенство Коши, получим:

$$|(\nabla q, \delta \mathbf{x})| \leq \sqrt{\sum_{i,j=1}^d \left(\frac{\partial q_i}{\partial x_j} \delta x_j \right)^2} =$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^d (\delta q_i)^2} \leq \sqrt{d} \sup_{1 \leq i \leq d} \|\delta q_i\|,$$

где $(\delta q_i)_i := \sum_{j=1}^d \frac{\partial q_i}{\partial x_j} \delta x_j$ — изохронное изменений i -й компоненты вектора $\mathbf{q}$ плотности теплового потока, $\|\delta q_i\| - L_2$ — норма компоненты δq_i вектора $\delta \mathbf{q}$: $\|\delta q_i\| = \sqrt{\int_X (\delta q_i)^2 dx_1 dx_2 dx_3}$.

Тогда, по определению, активное сопротивление составит:

$$\mathfrak{R}_a := \frac{B}{\Delta} = \frac{(\nabla T, \delta \mathbf{x})}{(\nabla q, \delta \mathbf{x})} \geq \frac{1}{\sqrt{d}} \sup_{1 \leq i \leq d} \mathfrak{R}_{a,i};$$

Переходя к точному равенству получим:

$$\mathfrak{R}_a := \frac{1}{\sqrt{d}} \sup_{1 \leq i \leq d} \mathfrak{R}_{a,i}.$$

ВЫВОДЫ

Иначе говоря, при увеличении размерности области активное термическое сопротивление не возрастает. В этом состоит смысл геометрического включения, т.е. увеличения размерности области, заполненной однородной изотропной средой. Это включение не увеличивает термического сопротивления области: тепловой поток в многомерной области размерностью d не меньше, чем в одномерной, $d = 1$, области. Увеличение размерности области в d раз приводит к увеличению теплового потока не больше, чем в $d^{1/2}$ раз.

Далее, реактивное сопротивление выражается так:

$$\mathfrak{R}_r := \mathfrak{R} - \mathfrak{R}_a = \frac{A \delta t + B}{C \delta t + \Delta} - \frac{B}{\Delta} =$$

$$= \frac{(A \Delta - B C) \delta t}{\Delta (C \delta t + \Delta)} = \frac{A}{C} - \frac{B}{\Delta} = \frac{A}{C} - \mathfrak{R}_a.$$

Следовательно,

$$\mathfrak{R} := \frac{A}{C} = \left(\frac{\partial T}{\partial q} \right)_x,$$

и имеет место практически полная аналогия с одномерным случаем распространения теплоты.

Суммарное термическое сопротивление превосходит активное сопротивление не более чем в четыре раза: $R/R_a \leq 4$; соответственно, реактивное термическое сопротивление превосходит активное не больше, чем в 3 раза $R_r/R_a \leq 3$. Результат не зависит от размерности d области.

Для одномерного потока в разделе 1 получены выражения, определяющие активное и реактивное сопротивление одномерной стены. Определение

термического сопротивления расширено для областей большей, чем 1 размерности. Показано, что реактивное сопротивление, как правило, не меньше активного сопротивления. Поэтому при нормировании термического сопротивления стены необходимо учитывать ее теплую инерцию и тепловую емкость стены, т.е. реакцию стенового ограждения на изменение температуры внешних источников.

Увеличение размерности стены не увеличивает активного термического сопротивления при сохранении температурного перепада.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гагарин В.Г., Козлов В.В. Перспективы повышения энергетической эффективности жилых зданий в России // Вестник МГСУ. 2011. № 3–1. С. 192–200.
2. Гагарин В.Г., Козлов В.В., Неклюдов А.Ю. Учет теплопроводных включений при определении тепловой нагрузки на систему отопления здания // БСТ: Бюллетень строительной техники. 2016. № 2 (978). С. 57–61.
3. Гагарин В.Г., Козлов В.В., Лушин К.И., Плющенко Н.Ю. Учет теплопроводных включений и вентилируемой прослойки при расчетах сопротивления теплопередаче стены с навесной фасадной системой (НФС) // Строительные материалы. 2016. № 6. С. 32–35. DOI: 10.31659/0585-430X-2016-738-6-32-35
4. Gagarin V., Akhmetov V., Zubarev K. Moisture behavior calculation of single-layer enclosing structure by means of discrete-continuous method // MATEC Web of Conferences. 2018. Vol. 170. P. 03014. DOI: 10.1051/mateconf/201817003014
5. Зубарев К.П., Гагарин В.Г. Математическая модель влажностного режима ограждающих конструкций с использованием дискретно-континуального подхода // Строительство — формирование среды жизнедеятельности : XXI Международная научная конференция «Молодежные инновации». М. : НИУ МГСУ, 2018. С. 242–245.
6. Гагарин В.Г., Неклюдов А.Ю. Учет теплотехнических неоднородностей ограждений при определении тепловой нагрузки на систему отопления здания // Жилищное строительство. 2014. № 6. С. 3–7.
7. Gagliano A., Patania F., Nocera F., Signorello C. Assessment of the dynamic thermal performance of massive buildings // Energy and Buildings. 2014. No. 72. Pp. 361–370. DOI: 10.1016/j.enbuild.2013.12.060
8. Berardi U., Tronchin L., Manfren M., Nas-tasi B. On the effects of variation of thermal conductivity in buildings in the italian construction sector // Energies. 2018. Vol. 11. Issue 4. P. 872. DOI: 10.3390/en11040872
9. Petrochenko M.V., Strelets K.I., Petrichenko M.R., Yavtushenko E.B. Pumping action of heat transfer for free convection flow in a ventilated facades // Applied Mechanics and Materials. 2014. Vol. 672–674. Pp. 567–570. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMM.672-674.567
10. Заборова Д.Д., Мусорина Т.А., Петриченко М.Р. Теплотехническая работоспособность многослойной стеновой конструкции // Научно-технические ведомости СПбПУ. Естественные и инженерные науки. 2017. Т. 23. № 1. С. 18–26. DOI: 10.18721/JEST.230102
11. Bianco N., Manca O., Nardini S., Tamburrino S. Effect of solid thickness on transient heat conduction in workpieces irradiated by a moving heat source // Defect and Diffusion Forum. 2010. Vol. 297–301. Pp. 1445–1450. DOI: 10.4028/www.scientific.net/DDF.297-301.1445
12. Туснина О.А., Емельянов А.А., Туснина В.М. Теплотехнические свойства различных конструктивных систем навесных вентилируемых фасадов // Инженерно-строительный журнал. 2013. № 8 (43). С. 54–63.
13. Корниенко С.В. Уточнение расчетных параметров микроклимата помещений при оценке влагозащитных свойств ограждающих конструкций // Вестник МГСУ. 2016. № 11. С. 132–145. DOI: 10.22227/1997-0935.2016.11.132-145
14. Корниенко С.В. Повышение теплозащиты стеновых конструкций зданий из объемных блоков // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2016. № 8 (47). С. 17–30.
15. Reilly A., Kinnane O. The impact of thermal mass on building energy consumption // Applied Energy. 2017. Vol. 198. Pp. 108–121. DOI: 10.1016/j.apenergy.2017.04.024
16. Johra H., Heiselberg P. Influence of internal thermal mass on the indoor thermal dynamics and integration of phase change materials in furniture for build-

ing energy storage: A review // *Renewable and Sustainable Energy Reviews*. 2017. Vol. 69. Pp. 19–32. DOI: 10.1016/j.rser.2016.11.145

17. Asdrubali F., D'Alessandro F., Schiavoni S. A review of unconventional sustainable building insulation materials // *Sustainable Materials and Technologies*. 2015. Vol. 4. Pp. 1–17. DOI: 10.1016/j.susmat.2015.05.002

18. Hatvani-Kovacs G., Belusko M., Pockett J., Bolland J. Heat stress-resistant building design in the Australian context // *Energy and Buildings*. 2018. Vol. 158. Pp. 290–299. DOI: 10.1016/j.enbuild.2017.10.025

19. Bianco V., Manca O., Nardini S. Numerical simulation of water/Al₂O₃ Nanofluid Turbulent Convection // *Advances in Mechanical Engineering*. 2010. Vol. 2. P. 976254. DOI: 10.1155/2010/976254

Поступила в редакцию 10 июня 2019 г.

Принята в доработанном виде 7 июля 2019 г.

Одобрена для публикации 30 июля 2019 г.

ОБ АВТОРАХ: Татьяна Александровна Мусорина — аспирант, ассистент кафедры гидравлики и прочности; Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого (СПбПУ); 195251, г. Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29; РИНЦ Author ID: 8777-8361, Scopus: 57189345350, ORCID: 0000-0002-8380-0067; tamusorina@mail.ru;

Дарья Дмитриевна Заборова — аспирант, ассистент кафедры гидравлики и прочности; Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого (СПбПУ); 195251, г. Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29; РИНЦ Author ID: 9635-4579, Scopus: 57190854628, ORCID: 0000-0002-8346-549X; zaborova-dasha@mail.ru;

Михаил Романович Петриченко — доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой гидравлики и прочности; Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого (СПбПУ); 195251, г. Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29; РИНЦ Author ID: 7779-4938, Scopus: 56426211200, ORCID: 0000-0002-3541-0072; fonpetrich@mail.ru.

REFERENCES

1. Gagarin V.G., Kozlov V.V. Prospects of increase of power efficiency of residential buildings in Russia. *Vestnik MGSU* [Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering]. 2011; 3-1:192-200. (rus.).

2. Gagarin V.G., Kozlov V.V., Neklyudov A.Yu. The accounting of heatconducting inclusions when determining thermal load on system of heating of the building. *BST: Bulletin of Construction Equipment*. 2016; 2(978):57-61. (rus.).

3. Gagarin V.G., Kozlov V.V., Lushin K.I., Plyushchenko N.YU. Accounting of heat-conducting inclusions and a ventilated layer when calculating the resistance to heat transfer of a wall with hinged facade system (HFS). *Construction Materials*. 2016; 6:32-35. DOI: 10.31659/0585-430X-2016-738-6-32-35 (rus.).

4. Gagarin V., Akhmetov V., Zubarev K. Moisture behavior calculation of single-layer enclosing structure by means of discrete-continuous method. *MATEC Web of Conferences*. Moscow, MGSU, 2018; 03014. DOI: 10.1051/mateconf/201817003014

5. Zubarev K.P., Gagarin V.G. The mathematical model of the humidity regime of building envelopes using the discrete-continuum approach. *Construction — the formation of the living environment XXI International Scientific Conference “Youth Innovation”*. 2018; 242-245. (rus.).

6. Gagarin V.G., Neklyudov A.Yu. Consideration of heat engineering heterogeneities of fences when determining the heat load on the heating system of a building. *Housing Construction*. 2014; 6:3-7. (rus.).

7. Gagliano A., Patania F., Nocera F., Signorello C. Assessment of the dynamic thermal performance of massive buildings. *Energy and Buildings*. 2014; 72:361-370. DOI: 10.1016/j.enbuild.2013.12.060

8. Berardi U., Tronchin L., Manfren M., Nastasi B. On the effects of variation of thermal conductivity in buildings in the Italian construction sector. *Energies*. 2018; 11(4):872. DOI: 10.3390/en11040872

9. Petrochenko M.V., Strelets K.I., Petrichenko M.R., Yavtushenko E.B. Pumping action of heat transfer for free convection flow in a ventilated facades. *Applied Mechanics and Materials*. 2014; 672-674:567-570. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMM.672-674.567

10. Zaborova D.D., Musorina T.A., Petrichenko M.R. Thermal performance of a multilayer wall structure // *Scientific and Technical Statements SPbPU. Natural and Engineering Sciences*. 2017; 1(23):18-26. DOI: 10.18721/JEST.230102 (rus.).

11. Bianco N., Manca O., Nardini S., Tamburri S. Effect of solid thickness on transient heat conduction in workpieces irradiated by a moving heat source.

Defect and Diffusion Forum. 2010; 297-301:1445-1450. DOI: 10.4028/www.scientific.net/DDF.297-301.1445

12. Tushina O.A., Emelyanov A.A., Tushina V.M. Thermal properties of various structural systems of ventilated facades. *Magazine of Civil Engineering*. 2013; 8(43):54-63. (rus.).

13. Kornienko S.V. Refinement of the calculated parameters of the indoor microclimate when assessing the moisture-proof properties of enclosing structures. *Vestnik MGSU* [Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering]. 2016; 11:132-145. DOI: 10.22227/1997-0935.2016.11.132-145 (rus.).

14. Kornienko S.V. Increase of heat protection of wall structures of buildings from volumetric blocks. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2016; 8(47):17-30. (rus.).

15. Reilly A., Kinnane O. The impact of thermal mass on building energy consumption. *Applied Energy*. 2017; 198:108-121. DOI: 10.1016/j.apenergy.2017.04.024

16. Johra H., Heiselberg P. Influence of internal thermal mass on the indoor thermal dynamics and integration of phase change materials in furniture for building energy storage: A review. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*. 2017; 69:19-32. DOI: 10.1016/j.rser.2016.11.145

17. Asdrubali F., D'Alessandro F., Schiavoni S. A review of unconventional sustainable building insulation materials. *Sustainable Materials and Technologies*. 2015; 4:1-17. DOI: 10.1016/j.susmat.2015.05.002

18. Hatvani-Kovacs G., Belusko M., Pockett J., Boland J. Heat stress-resistant building design in the Australian context. *Energy and Buildings*. 2018; 158:290-299. DOI: 10.1016/j.enbuild.2017.10.025

19. Bianco V., Manca O., Nardini S. Numerical simulation of water/Al₂O₃ nanofluid turbulent convection. *Advances in Mechanical Engineering*. 2010; 2:976254. DOI: 10.1155/2010/976254

Received June 10, 2019

Adopted in its final form on July 7, 2019.

Approved for publication July 30, 2019.

BIONOTES: **Tatiana A. Musorina** — PhD student; **Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University (SPbPU)**; 29 Politechnicheskaya st., St. Petersburg, 195251, Russian Federation; RISC Author ID: 8777-8361, Scopus: 57189345350, ORCID: 0000-0002-8380-0067; tamusorina@mail.ru;

Daria D. Zaborova — PhD student; **Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University (SPbPU)**; 29 Politechnicheskaya st., St. Petersburg, 195251, Russian Federation; RISC Author ID: 9635-4579, Scopus: 57190854628, ORCID: 0000-0002-8346-549X; zaborova-dasha@mail.ru;

Michail R. Petritchenko — Ph.D., Professor; **Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University (SPbPU)**; 29 Politechnicheskaya st., St. Petersburg, 195251, Russian Federation; RISC Author ID: 7779-4938, Scopus: 56426211200, ORCID: 0000-0002-3541-0072; fonpetrich@mail.ru.