УДК531.2

Ю.Т. Чернов, И.А. Петров*

*ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко,*ФГБОУ ВПО «МГСУ»*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ СТАТИЧЕСКИХ СИЛ ПРИ РАСЧЕТЕ СИСТЕМ С ВЫКЛЮЧАЮЩИМИСЯ СВЯЗЯМИ

Приведен алгоритм расчета систем с выключающимися связями, основанный на совместном решении двух линейных систем. Такой подход более эффективен для систем с однократным выключением связей. Приведены формулы для эквивалентных статических нагрузок, на которые рассчитываются системы после выключения связей при определении усилий.

Ключевые слова: колебания, статическое равновесие, статически эквивалентные силы, выключающаяся связь, прогрессирующее обрушение.

Два возможных подхода к расчету систем с выключающимися связями изложены в [1]:

1) рассматриваются последовательно две линейные системы: до и после выключения связей; начальные условия, определяющие свободные колебания второй системы, вычисляются при расчете основной системы;

2) выключающаяся связь рассматривается как частный случай физической нелинейности, которая учитывается при расчете как некоторая «фиктивная» нагрузка; решения интегральных уравнений, к которым сводятся нелинейные уравнения движения, строятся с помощью шагового метода по времени с итерациями на каждом шаге[1].

Построим решение двух матричных уравнений движения с конечным числом степеней свободы— полной и систем с выключающимися связями[2, 3]:

$$M\ddot{\vec{z}}+D\dot{\vec{z}}+K\vec{z}=\vec{q}(t)\,; \qquad (1)$$

$$M\ddot{\vec{z}}_1+D_1\dot{\vec{z}}_1+K_1\vec{z}_1=\vec{q}(t_1)\,, \qquad (2)$$

полагая $z_1 = z–z_0$, $t_1 = t–t_0$, гдеt_0— время выключения связей, решение уравнения (2) также записываем во временном диапазоне 0 — t.

В (1), (2) M — матрица масс,D, D_1—матрицы диссипативных коэффициентов; K, K_1 —матрицы жесткости основной системы и системы после выключения связей.

Решение уравнений (1), (2) строим в виде разложений по формам собственных колебаний этих систем

$$\vec{z}(t)=\Phi\vec{a}(t);\vec{z}_1(t)=\Phi_1\vec{a}(t), \qquad (3)$$

где Ф, Φ_1— матрица нормированных собственных векторов полной системы и системы с выключенными связями.

Решение первого уравнения строим при нулевых начальных условиях. Начальные условия для второй системы определяем из решений для основной системы $\vec{z}(t_0),\dot{\vec{z}}(t_0)$, где t_0— время выключения связей. После выключения связей колебания системы возбуждаются относительно нового положения статического равновесия. Учитывая это, начальные условия следует записать в виде

$$\vec{z}_{10}=\vec{z}(t_0)-\Delta\vec{z}_{\text{СТ}};\ \dot{\vec{z}}_{10}=\dot{\vec{z}}(t_0)\,. \qquad (4)$$

Значения $\vec{z}_{10},\dot{\vec{z}}_{10}$ также представляем в виде разложения по собственным векторам второй системы

$$\vec{z}_{10}=\Phi_1\vec{a}_1(0);\dot{\vec{z}}_{10}=\Phi_1\dot{\vec{a}}_1(0). \qquad (5)$$

© Чернов Ю.Т., Петров И.А., 2012

Умножим обе части зависимостей (5) слева на $M\Phi'$, где Φ'— транспонированная матрица. С учетом ортогональности собственных векторов и нормирования можем записать

$$\vec{a}_{10} = \vec{a}_1(0) = \Phi_1' M \vec{z}_{10}; \dot{\vec{a}}_{10} = \dot{\vec{a}}_1(0) = \Phi_1' M \dot{\vec{z}}_{10}. \quad (6)$$

В тех случаях, когда в момент выключения (разрушения) связей система находилась в положении статического равновесия, условия (4) принимают вид

$$\vec{z}_{10} = -\overrightarrow{\Delta z}_{\text{ст}}; \dot{\vec{z}}_{10} = 0. \quad (7)$$

Усилия в линейных динамических системах вычисляют, как правило, определив вначале эквивалентные (квази)статические силы. При вычислении этих сил удобно воспользоваться такой схемой, при которой не требуется предварительное вычисление инерционных сил. Такой подход используется, в частности, при определении сейсмических сил спектральным методом.

Рассмотрим записанное в матричном виде уравнение движения системы с конечным числом степеней свободы (индекс 1 опускаем)

$$M\ddot{\vec{z}} + D\dot{\vec{z}} + K\vec{z} = \vec{q}(t). \quad (8)$$

Следует иметь в виду, что в системах после выключения связей возбуждаются также свободные колебания. Представив решение уравнения (8) в виде разложения по нормированным собственным векторам $\vec{z} = \Phi\vec{a}$ и применив стандартную процедуру, сводим систему (8) к n несвязным уравнениям относительно главных координат

$$\ddot{a}_r + 2n_r\dot{a}_r + p_r^2 a_r = b_r, \quad (9)$$

$$r = 1,2\ldots n,$$

в которых n_r—некоторые диссипативные коэффициенты, элементы вектора $b = \Phi'\vec{q}(t)$ равны

$$b_r = \sum_{i=1}^{n} Z_{ir} q_i, \quad (10)$$

где Z_{ir}—элементы вектора r-й нормированной формы.

Из (8) следуют также зависимости для эквивалентных статических сил

$$\vec{S} = K\vec{z} = \vec{q}(t) - M\ddot{\vec{z}} - D\dot{\vec{z}}. \quad (11)$$

Удобно воспользоваться первой зависимостью и записать ее в виде

$$\vec{S} = K\Phi\vec{a}(t). \quad (12)$$

В решении уравнений (9) присутствуют как вынужденные, так и свободные колебания, т.е. $a_r = a_{r\text{в}} + a_{r\text{св}}$,

где $a_{r\text{в}} = \int_0^t b_r(\tau)V_r(p_r^*, t-\tau)d\tau = \sum_{i=0}^{n} Z_{ir} J_{ir}(t),$ (13)

где $J_{ir} = \int_0^t q_i(\tau)V_r(p_r^*, t-\tau)d\tau; V_r = \frac{1}{p_r^*}e^{-n_r t}\sin(p_r^* t)$— импульсная переходная функция для r-й формы колебаний.

$$a_{r\text{св}} = e^{-n_r t}\left[a_{0r}\cos\left(p_r^* t\right) + \frac{\dot{a}_{0r} + a_{0r}n_r}{p_r^*}\sin\left(p_r^* t\right)\right] \quad (14)$$

$$r = 1, 2\ldots n.$$

Формулу (12) можно преобразовать к виду, более удобному для вычислений. Умножая обе части равенства (12) на Φ' и учитывая второе условие ортогональности, запишем

$$\Phi'\vec{S} = \Lambda\vec{a}(t), \quad (15)$$

где Λ— диагональная матрица собственных частот.

Для нормированных собственных векторов имеет место зависимость

$$M\Phi\Phi' = E, \tag{16}$$

где E— единичная матрица.

Умножив обе части равенства (15) на $M\Phi$, получаем удобную для анализа и вычислений статических сил формулу

$$\vec{S} = M\Phi\Lambda\vec{a}(t). \tag{17}$$

Если система до выключения связи находилась в положении статического равновесия, следует положить $q(t) = 0$ и в решении для свободных колебаний учесть зависимости (6) и начальные условия (7). В результате можем записать

$$\vec{a}_0(t) = -\Phi' M\overrightarrow{\Delta z}; \dot{\vec{a}}_0(t) = 0; \vec{a}_{rв}(t) = 0; \tag{18}$$

$$a_{rсв} = e^{-n_r t} a_{0r}\left[\cos\left(p_r^* t\right) + \frac{n_r}{p_r^*}\sin\left(p_r^* t\right)\right]. \tag{19}$$

$r = 1, 2\ldots n.$

Оценим приближенно соотношение максимальной динамической силы S(эквивалентной статической) к постоянной статической Pдля различных $\frac{k_1}{k}$, где k, k_1—жесткость системы до и после выключения связи.

Уравнение свободных колебаний системы после выключения связи (без учета диссипативных сил) [1]

$$z_1(t) = -\Delta z_0 \cos(p_1 t), \tag{20}$$

где p_1—частота собственных колебаний системы после выключения связи,$\Delta z_0 = z_m$—z_{1m};z_mи z_{1m}— положение центра масс до и после выключения связи.

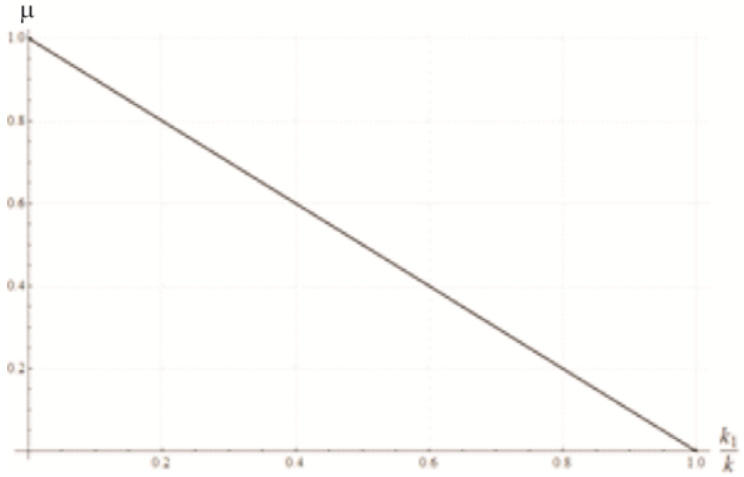
Динамическая нагрузка достигает максимума в крайнем нижнем положении

$$S_{\max} = -\Delta z_0 k_1 = mg\frac{k - k_1}{k}. \tag{21}$$

В результате можем записать

$$\mu = \frac{S_{\max}}{P} = 1 - \frac{k_1}{k}. \tag{22}$$

Уравнение (22) — уравнение прямой линии (рис).



Из (22) и рис. следует, что процент снижения жесткости системы приводит к такому же увеличению суммарной нагрузки.

Библиографический список

1. *Чернов Ю.Т.* Вибрации строительных конструкций. М. :Изд-во АСВ, 2011. 382 с.
2. *Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Универ У.* Колебания в инженерном деле. М. : Машиностроение, 1985. 472с.
3. *Чернов Ю.Т.* К расчету систем с выключающимися связями // Строительная механика и расчет сооружений. 2010. № 4. С. 53—57.

Поступила в редакцию в 2012 г.

Об авторах: **Чернов Юрий Тихонович**—доктор технических наук, профессор, **Центральный научно-исследовательский институт строительных конструкций и сооружений(ЦНИИСК) им. В.А. Кучеренко**, 109428, г. Москва, 2-я Институтская ул., д. 6;

Петров Иван Александрович—аспирант кафедры строительной механики,**ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет» (МГСУ)**, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д.26, ivpetrov87@yandex.ru.

Для цитирования: *Чернов Ю.Т., Петров И.А.* Определение эквивалентных статических сил при расчете систем с выключающимися связями // Вестник МГСУ. 2012. № 4. С. 98—101.

Yu.T. Chernov, I.A. Petrov

IDENTIFICATION OF EQUIVALENT STATIC FORCES AS PART OF ANALYSIS OF SYSTEMS THAT HAVE DISRUPTABLE CONSTRAINS

The algorithm of analysis of systems that have disruptable constrains is described in the article. The algorithm is based on the joint solving of two linear systems. The first linear system is the one that describes the processes before constraints get disrupted; the second linear system represents the system describing the processes in the aftermath of disruption of constrains with account for the influence of free vibrations. Free vibrations are caused by disrupted constraints. The proposed approach is more effective, if applicable to the systems that have their constraints disrupted only once. Also, the method describing disrupted constraints is considered as a special case of physical nonlinearity. Physical non-linearity adds some fictitious load to regular loads.

Formulas of equivalent static loads, with the help of which the systems are analyzed when constraints are disrupted, are generated. No inertial force is to be derived to obtain equivalent static loads. This is important in view of their application in dynamic analyses.

Analysis of the static system in the event of disrupted constraints is based on the equations derived by the authors. The result of the analysis represents an inverse linear relation of static loading and relative stiffness of the system with disrupted constraints.This means that the lower the stiffness of the system, the higher the static loading.

Key words: vibration, equilibrium of statics, equivalent static loads, disruptable constrains, progressive collapse.

References

1. ChernovYu.T. *Vibratsiistroitel'nykhkonstruktsiy* [Vibrations of Engineering Structures]. Moscow, ASV Publ., 2011, 382 p.
2. Timoshenko S.P., Yang D.Kh., Univer U. *Kolebaniya v inzhenernom dele* [Vibrations in Engineering]. Moscow, *Mashinostroenie* [Machine Building],1985, 472 p.
3. ChernovYu.T. *K raschetusistem s vyklyuchayushchimisyasvyazyami* [About the Analysis of Systems That Have Disruptable Constraints].*Stroitel'nayamekhanika i raschetsooruzheniy* [Structural Mechanics and Analysis of Structures].2010, no. 4, pp. 53—57.

About the authors: **ChernovYuriyTikhonovich** —Doctor of Technical Sciences, Professor, **Central Scientific Research Institute for Building Structuresnamed after V.A. Kucherenko(V.A. Kucherenko CSRIBS)**, 6 2nd Institutskaya St., Moscow, 109428, Russian Federation;

Petrov Ivan Aleksandrovich — postgraduate student, Department of Structural Mechanics, **Moscow State University of Civil Engineering (MSUCE)**, 26 Yaroslavskoeshosse, Moscow, 129337, Russian Federation;ivpetrov87@yandex.ru.

For citation: ChernovYu.T., Petrov I.A. *Opredelenieekvivalentnykhstaticheskikhsilpriraschetesistem s vyklyuchayushchimisyasvyazyami* [Identification of Equivalent Static Forces as part of Analysis of Systems That Have Disruptable Constrains]. *Vestnik MGSU* [Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering]. 2012, no. 4, pp. 98—101.