ПРОЕКТИРОВАНИЕ И КОНСТРУИРОВАНИЕ СТРОИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ. ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ В СТРОИТЕЛЬСТВЕ

УДК 624.04 DOI: 10.22227/1997-0935.2017.6.631-635

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА КРУГЛЫХ ПЛИТ В ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ ПОСТАНОВКЕ

Р.Ф. Габбасов, Н.Б. Уварова
Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ), 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26

АННОТАЦИЯ. В статье рассматривается осесимметричная задача о расчете круглой плиты на статические нагрузки в геометрически нелинейной постановке. Для решения задачи привлекаются обобщенные уравнения метода конечных разностей (МКР), позволяющие решать задачу в пределах интегрируемой области с учетом разрывов искомой функции, ее первой производной и правой части исходного дифференциального уравнения.

Разрешающие дифференциальные уравнения задачи, составленные относительно искомых функций прогиба и напряжений, сводятся к четырем дифференциальным уравнениям, два из которых — линейные первого порядка, а два — нелинейные второго порядка. Система полученных дифференциальных уравнений решается численно. Предлагаемая методика иллюстрируется на примере расчета круглой плиты; при этом исходные данные взяты из работы [1]. Результаты расчета при минимальном числе разбиений сравниваются с известным решением А.С. Вольмира [1] и свидетельствуют о возможности использования численного метода для решения задач в нелинейной постановке.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: круглая плита, тонкая, изотропная, нелинейная задача, численное решение, обобщенные уравнения метода конечных разностей

ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ: Габбасов Р.Ф., Уварова Н.Б. Численный метод расчета круглых плит в геометрически нелинейной постановке // Вестник МГСУ. 2017. Вып. 12. № 6 (105). С. 631–635. DOI: 10.22227/1997-0935.2017.6.631-635

NUMERICAL METHOD OF CALCULATION OF ROUND PLATES IN A GEOMETRICALLY NONLINEAR STATEMENT

R.F. Gabbasov, V.N. Uvarova
Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (MGSU), 26 Yaroslavskoe shosse, Moscow, 129337, Russian Federation

ABSTRACT. The article considers the axisymmetric problem about the calculation of round plates with dead loading in a geometrically nonlinear system.

To solve the problem some generalized equations of finite difference method (FMD) are needed that allow to solve tasks within intergrable scope taking into account discontinuities of the required function, its first-order derivative and the right-hand side of the primitive differential equation.

Resolvent differential equations of the question comprised fractionally the required function of the inflection and stresses are reduced to four differential equations, two of which are linear of the first-order and two are nonlinear of the second order. The obtained system of differential equations is solved numerically. The proposed method is shown with the example of calculation of a round plate; the given data are taken from work [1].

The calculation data with the minimum number of partitions are compared to the known solution of A.S. Vol'mir [1] and they indicate the possibility of using a numerical method for handling the problem in nonlinear statement.

KEY WORDS: circular plate, refined, isotropic, non-linear problem, computational solution, generalized equations of finite difference method

FOR CITATION: Gabbasov R.F., Uvarova V.N. Chislennyy metod rascheta kruglykh plit v geometricheski nelineynoy postanovke [Numerical Method of Calculation of Round Plates in a Geometrically Nonlinear Statement]. Vestnik MGSU [Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering]. 2017, vol. 12, issue 6 (105), pp. 631–635. DOI: 10.22227/1997-0935.2017.6.631-635

Расчету тонких пластин в геометрически нелинейной постановке посвящено достаточно большое число работ. В исследованиях [1], [3]–[5] используются вариационные методы Галеркина, Ритца–Тимошенко, в [6] разрабатывается приближенный метод расчета, в котором при решении нелинейной

© Габбасов Р.Ф., Уварова Н.Б., 2017

задачи отыскивается корректирующая поправка к линейному решению, а в [7] используется аппарат нелинейной инкрементальной строительной механики. Численные методы решения представлены в работе [8]. В статьях [9]–[11] рассматриваются нелинейные задачи расчета гибких плит при наличии дислокаций и ползучести.

Цель данной работы — разработать алгоритм численного метода расчета круглой плиты в геометрически нелинейной постановке и иллюстрировать его на примере при минимальном числе разбиений области или на редкой сетке. Решение строится с использованием обобщенных уравнений метода конечных разностей [2].

Рассматривается тонкая изотропная круглая пластина, упругие прогибы которой сравнимы с толщиной, т.е. формулируется геометрически нелинейная задача.

Разрешающие дифференциальные уравнения поперечного изгиба в полярных координатах для осесимметричной задачи, записанные относительно прогиба и функции напряжений [1], имеют вид

$$D\frac{d}{dr}\left(\nabla^2 W\right) = \Psi + \frac{H}{r}\frac{d\Phi}{dr}\frac{dW}{dr}; \qquad (1)$$

$$\frac{d}{dr}\left(\nabla^2\Phi\right) = -\frac{E}{2r}\left(\frac{dW}{dr}\right)^2, \qquad (2)$$

где D — цилиндрическая жесткость; r — радиус круга в рассматриваемой точке; W — прогибы; Ψ — функция нагрузки; H — толщина плиты; E — модуль упругости материала плиты; Φ — функция напряжений.

Раскроем операторы

$$\nabla^2 W = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dW}{dr}\right) = \frac{1}{r}\left(\frac{dW}{dr} + r\frac{d^2W}{dr^2}\right)$$

и

$$\frac{d}{dr}\left(\nabla^2 W\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{dW}{dr} + \frac{1}{r}\frac{d^2W}{dr^2} + \frac{d^3W}{dr^3}. \qquad (3)$$

Далее введем безразмерные величины

$$\rho = \frac{r}{c};\ \hbar = \frac{H}{c};\ w = \frac{W}{c};\ p = \frac{\Psi}{D}c^2, \qquad (4)$$

где c — радиус плиты.

Умножим уравнение (1) на $\frac{c^2}{D}$ и с учетом (3) представим его в безразмерном виде

$$-\frac{1}{\rho^2}\frac{dw}{d\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{d^2w}{d\rho^2} + \frac{d^3w}{d\rho^3} = p + \frac{\hbar}{\rho}\frac{df}{d\rho}\frac{dw}{d\rho}. \qquad (5)$$

Понизим порядок дифференциального уравнения (5), обозначив:

$$\frac{df}{d\rho} = \lambda, \qquad (6)$$

$$\frac{dw}{d\rho} = s, \qquad (7)$$

$$\frac{d^2s}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{ds}{d\rho} = p + \frac{s}{\rho^2} + \frac{\hbar}{\rho}\lambda s. \qquad (8)$$

Уравнение (2), левая часть которого с точностью до обозначений совпадает с (1), при делении на $D = EH^3/12\left(1-\mu^2\right)$, введении безразмерных величин и умножении на $\frac{c^4}{D}$ принимает вид

$$\frac{d^2\lambda}{d\rho^2} + \frac{1}{\lambda}\frac{d\lambda}{d\rho} = \frac{\lambda}{\rho^2} - \frac{k}{\rho}s^2. \qquad (9)$$

Здесь

$$k = \frac{6\left(1-\mu^2\right)}{\hbar^3} \qquad (10).$$

Таким образом, получаем четыре дифференциальные уравнения: (6), (7) — линейные первого порядка; (8), (10) — нелинейные второго порядка.

Перепишем уравнения (8) и (9) в виде

$$\frac{d^2s}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{ds}{d\rho} = -b, \qquad (8a)$$

$$\frac{d^2\lambda}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d\lambda}{d\rho} = -a, \qquad (9a)$$

где

$$b = -\left(p + \frac{s}{\rho^2} + \frac{\hbar}{\rho}\lambda s\right), \qquad (11)$$

$$a = \left(\frac{k}{\rho}s^2 - \frac{\lambda}{\rho^2}\right). \qquad (12)$$

Для численного решения дифференциальных уравнений (8а), (9а) воспользуемся обобщенным уравнением метода конечных разностей, которое следует из формулы (1.5.9) [2] как частный случай уравнения метода последовательных аппроксимаций МПА. При отсутствии разрывов и при нагрузке $p_{i-1} = p_i = p_{i+1}$ оно имеет вид

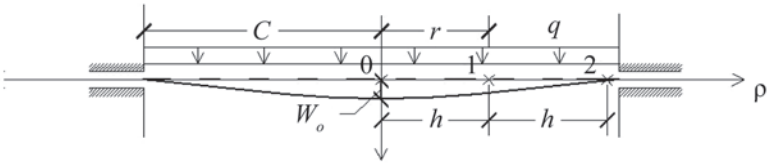
$$\left(\alpha - \frac{h}{2}\delta\right)\omega_{i-1} - 2\alpha\omega_i + \left(\alpha + \frac{h}{2}\delta\right)\omega_{i+1} = -h^2 p_i, \qquad (13)$$

где h — равномерный шаг одномерной сетки; α и δ — коэффициенты при второй и первой производной уравнений (8а), (9а) $\alpha = 1$, $\delta = \frac{1}{\rho}$.

Запишем формулу (13) применительно к (8а) и (9а) с учетом правых частей (11) и (12):

$$\left(1 - \frac{h}{2}\frac{1}{\rho_i}\right)s_{i-1} - \left(2 + \frac{h^2}{\rho^2} + \frac{h^2\hbar}{\rho_i}\lambda_i\right)s_i + \left(1 + \frac{h}{2}\frac{1}{\rho_i}\right)s_{i+1} = h^2 p_i, \qquad (14)$$

$$\left(1 - \frac{h}{2}\frac{1}{\rho_i}\right)\lambda_{i-1} - \left(2 + \frac{h^2}{\rho_i^2}\right)\lambda_i + \left(1 + \frac{h}{2}\frac{1}{\rho_i}\right)\lambda_{i+1} = -h^2\frac{k}{\rho_i}s_i^2. \qquad (15)$$



Рисунок

Далее приведем разностные аппроксимации по МКР дифференциальных уравнений первого порядка (6) и (7); для этого воспользуемся уравнением (1.5.10) [2], полагая, что нет разрывов и

$$\delta = 1,\ \delta\left(\omega_{i-1} - \omega_{i+1}\right) = 2hp_i\,. \qquad (16)$$

Тогда получим

$$w_{i-1} - w_{i+1} = -2hs_i \qquad (17)$$

и

$$f_{i-1} - f_{i+1} = -2h\lambda_i\,. \qquad (18)$$

Приведем пример расчета защемленной по контуру (с возможностью линейных перемещений) круглой плиты на действие равномерно распределенной нагрузки (рис.) с параметрами [1] c = 10 см, H = 0,1 см, $\hbar$ = 0,01, $E = 0{,}75\cdot10^6$ кгсм^2, $q = 0{,}5\ \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$, μ = 0,3.

Возьмем шаг сетки h = 1/2.

Запишем разностное уравнение (14) для точки i = 1, где $\rho_1 = 0{,}5 : 0{,}5s_0 - (3 + 0{,}005\lambda_1)s_1 + 1{,}5s_2 = 0{,}25p_1$ или $-(6 + 0{,}01\lambda_1)s_1 = 0{,}5p_1$ (19).

Здесь учтено, что $s_0 = s_2 = 0$, первое следует их условий симметрии, а второе из граничных условий. Согласно статье [1] функция напряжений $\Psi = \frac{qr}{2}$, тогда

$$p_1 = \frac{\Psi}{D}c^2 = \frac{q\rho_1}{2}\frac{c^2}{D}, \qquad (20)$$

где, согласно (4), $r = \rho_1$. Уравнение (15) для точки $i = 1 : 0{,}5\lambda_0 - 3\lambda_1 + 1{,}5\lambda_2 = -0{,}5ks_1^2$, согласно работе [1], $\lambda_0 = \lambda_1 = 0$, тогда

$$\lambda_1 = \frac{k}{6}s_1^2\,. \qquad (21)$$

Уравнение (17) для точки i = 1 имеет вид $w_0 - w_2 = -s_1$. Так как на контуре $w_2 = 0$, то получаем

$$s_1 = -w_0. \qquad (22)$$

Подставляя в формулу (19) выражение для λ (21) и p (20), получаем кубическое уравнение относительно w_0:

$$\frac{k}{600}w_0^3 + 6w_0 = \frac{qc^3}{4D}\rho_1. \qquad (23)$$

Для сравнения результата расчета с решением [1] следует преобразовать уравнение (23), а именно ввести параметры, используемые в цитируемой монографии φ и q^*. Принимаем $\varphi = \frac{W_0}{H}$ (W_0 — прогиб в центре), $q^* = \frac{q}{E}\left(\frac{c}{H}\right)^4$, $q^* = \frac{0{,}5}{0{,}75\cdot10^6}100^4 = 66{,}7$ вычисляем цилиндрическую жесткость D, k вычисляем по (10), w_0 и $\hbar$ записываем согласно (4).

В результате уравнение (23) принимает вид

$$\varphi^3 + 6{,}59\varphi = 1{,}5q^*\,, \qquad (24),$$

а с учетом $q^*\varphi^3 + 6{,}59\varphi = 100$. Из решения уравнения находим: φ = 4,17.

В работе [1] из диаграммы (4.14) при q^* = 66,7 значение φ = 3,8. Разница составляет 9,7 %.

Таким образом, показана возможность применения обобщенных уравнений метода конечных разностей к расчету нелинейной задачи. Точность решения можно повысить, увеличивая число разбиений радиуса, при этом система уравнений всегда будет обладать полнотой. Алгоритм расчета разработан с целью использования компьютеров. Приведенный пример расчета служит иллюстрацией алгоритма и показывает, что уравнения дают результаты, позволяющие решать задачи в нелинейной постановке при минимальном числе разбиений. Представленная работа позволяет перейти к решению задач, в которых имеются разрывы искомой функции, ее первой производной и правой части исходного дифференциального уравнения.

Отметим, что в статьях [12] и [13] для расчета тонких пластин в линейной постановке на разрывные нагрузки используются обобщенные уравнения МКР. Полученные решения могут быть полезны в качестве первого приближения для нелинейных задач, также следует отметить работу [14], в которой приводится аналитический расчет круглых пластин и дается обширная библиография.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вольмир А.С.* Гибкие пластинки и оболочки. М. : ГИТТЛ, 1956. С. 420.

2. *Габбасов Р.Ф., Габбасов А.Р., Филатов В.В.* Численное построение разрывных решений задач строительной механики. М. : Изд-во АСВ, 2008. С. 280.

3. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки : пер. с англ. М. : Наука, 1966. 635 с.

4. *Колмогоров Г.Л., Мельникова Т.Е.* Применение метода Ритца—Тимошенко для расчета круглых гибких

пластин // Прикладная математика и вопросы управления. 2016. № 2. С. 14–23.

5. *Кулиев В.Р.* Особенности расчета и анализ нелинейного поведения гибких пластин на основе минимизации энергии деформации : дисс. … канд. техн. наук. Пермь, 2000. 138 с.

6. *Рогалевич В.В., Тимашев С.А.* Новый приближенный метод расчета гибких пластин постоянной и переменной жесткости // Академический вестник УралНИИПроект РААСН. 2012. № 1. С. 52–56.

7. *Петров В.В.* Нелинейная инкрементальная строительная механика. М. : Инфра-Инженерия, 2014. 480 с.

8. *Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н. Мозгалева М.Л.* Численные и аналитические методы расчета строительных конструкций. М. : Изд-во АСВ, 2009. 336 с.

9. *Фам Т.Х.* Нелинейный изгиб упругой пластинки с распределенными дислокациями : дисс. … канд. физ.-мат. наук. Ростов-н/Д, 2011. 104 с.

10. *Андреев В.И., Язьев Б.М., Чепурненко А.С.* Осесимметричный изгиб круглой гибкой плиты при ползучести // Вестник МГСУ. 2014. № 5. С. 16–24.

11. *Andreev V.I., Yazyev B.M., Chepurnenko A.S.* On the bending of a thin plate at nonlinear creep // Advanced Materials Research. 2014. Vol. 900. Pp. 707–710.

12. *Габбасов Р.Ф., Хоанг Т.А., Уварова Н.Б., Ипатова О.Н.* Расчет круглых плит постоянной жесткости на локальные нагрузки // Промышленное и гражданское строительство. 2015. № 3. С. 20–23.

13. *Никитенко М.А., Уварова Н.Б.* Численный метод расчета круглых плит на разрывные нагрузки // Дни студенческой науки НИУ МГСУ : сб. докл. науч.-техн. конф. по итогам научно-исследовательских работ студентов института строительства и архитектуры. М. : НИУ МГСУ, 2016. С. 425–427. Режим доступа: http://mgsu.ru/resources/izdatelskayadeyatelnost/izdaniya/izdaniya-otkr-dostupa/.

14. *Коренева Е.Б.* Аналитические методы расчета пластин переменной толщины и их практические приложения. М. : Изд-во АСВ, 2009. 238 с.

Поступила в редакцию в феврале 2017 г.
Принята в доработанном виде в марте 2017 г.
Одобрена для публикации в мае 2017 г.

Об авторах: **Габбасов Радек Фатыхович** — доктор технических наук, профессор кафедры строительной и теоретической механики, **Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ)**, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, nbuvarova@yandex.ru;

Уварова Наталия Борисовна — кандидат технических наук, доцент кафедры строительной и теоретической механики, **Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ)**, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, nbuvarova@yandex.ru.

REFERENCES

1. Vol'mir A.S. *Gibkie plastinki i obolochki* [Flexible Plates and Shells]. Moscow, GITTL Publ, 1956, 420 p. (In Russian)

2. Gabbasov R.F., Gabbasov A.R., Filatov V.V. *Chislennoe postroenie razryvnykh resheniy zadach stroitel'noy mekhaniki* [Numerical Construction of Discontinuous Solutions of the Problems of Structural Mechanics]. Moscow, ASV Publ., 2008, 280 p. (In Russian)

3. Timoshenko S.P., Woinowsky-Krieger S. *Theory of Plates and Shells.* 2nd ed. New York, McGraw-Hill, 1964.

4. Kolmogorov G.L., Mel'nikova T.E. Primenenie metoda Rittsa–Timoshenko dlya rascheta kruglykh gibkikh plastin [Application of the Ritz–Timoshenko Method, for Calculating the Round Flexible Plates]. *Prikladnaya matematika i voprosy upravleniya* [Journal of Applied Mathematics and Mechanics]. 2016, no. 2, pp. 14–23. (In Russian)

5. Kuliyev V.R. *Osobennosti rascheta i analiz nelineynogo povedeniya gibkikh plastin na osnove minimizatsii energii deformatsii* : *dissertatsiya ... kandidata tekhnicheskikh nauk* [Peculiarities of Calculation and Analysis of Nonlinear Behavior of Flexible Plates on the Basis of Deformation Energy Minimization : Thesis … Candidate of Technical Sciences]. Perm', 2000, 138 p. (In Russian)

6. Rogalevich V.V., Timashev S.A. Novyy priblizhennyy metod rascheta gibkikh plastin postoyannoy i peremennoy zhestkosti [New Approximate Method for Calculating Flexible Plates of Constant and Variable Stiffness]. *Akademicheskiy vestnik UralNIIIProekt RAASN* [Akademicheskiy vestnik UralNIIIProekt RAASN]. 2012, no. 1, pp. 52–56. (In Russian)

7. Petrov V.V. *Nelineynaya inkremental'naya stroitel'naya mekhanika* [Nonlinear Incremental Construction Mechanics]. Moscow, Infra-inzheneriya Publ., 2014, 480 p. (In Russian)

8. Zolotov A.B., Akimov P.A., Sidorov V.N., Mozgaleva M.L. *Chislennye i analiticheskie metody rascheta stroitel'nykh konstruktsiy* [Numerical and Analytical Methods for Calculating Construction Structures]. Moscow, ASV Publ., 2009, 336 p. (In Russian)

9. Fam T. K. *Nelineynyy izgib uprugoy plastinki s raspredelennymi dislokatsiyami* : *dissertatsiya ... kandidata fiziko-matematicheskikh nauk* [Nonlinear Bending of an Elastic Plate with Distributed Dislocations: Thesis ... Candidate of Physical and Mathematical Sciences]. Rostov-na-Donu, 2011, 104 p. (In Russian)

10. Andreev V.I., Yazyev B.M., Chepurnenko A.S. Osesimmetrichnyy izgib krugloy gibkoy plity pri polzuchesti [Axially Symmetric Bending of a Circular Flexible Plate under the Creep]. *Vestnik MGSU* [Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering]. 2014, no. 5, pp. 16–24. (In Russian)

11. Andreev V.I., Yazyev B.M., Chepurnenko A.S. On the Bending of a Thin Plate at Nonlinear Creep. *Advanced Materials Research.* 2014, vol. 900, pp. 707–710.

12. Gabbasov R.F., Khoang T.A., Uvarova N.B., Ipatova O.N. Raschet kruglykh plit postoyannoy zhestkosti na lokal'nye nagruzki [Calculation of Round Plates of Constant Stiffness for Local Loads]. *Promyshlennoe i grazhdanskoe stroitel'stvo* [Industrial and Civil Construction]. 2015, no. 3, pp. 20–23. (In Russian)

13. Uvarova N.B., Nikitenko M.A. Chislennyy metod rascheta kruglykh plit na razryvnye nagruzki [Numerical Method of Calculation of Round Plates for Tensile Loads]. *Dni studencheskoy nauki NIU MGSU : sbornik dokladov nauchno-tekhnicheskoy konferentsii po itogam nauchno-issledovatel'skikh rabot studentov instituta stroitel'stva i arkhitektury* [Days of MGSU student science : Collection of Reports of Scientific-Technical Conference on the Results of Research Work of Students of the Institute of Construction and Architecture]. Moscow, NIU MGSU Publ., 2016, pp. 425–427. Available at: http://mgsu.ru/resources/izdatelskayadeyatelnost/izdaniya/izdaniya-otkr-dostupa/. (In Russian)

14. Koreneva E.B. *Analiticheskie metody rascheta plastin peremennoy tolshchiny i ikh prakticheskie prilozheniya* [Analytical Methods for Calculating Variable Thickness Plates and their Practical Applications]. Moscow, ASV Publ., 2009, 238 p. (In Russian)

Received in February 2017.
Adopted in revised form in March 2017.
Approved for publication in May 2017.

About the authors: **Gabbasov Radek Fatykhovich** — Doctor of Technical Sciences, Professor, Construction and Theoretical Mechanics Department, **Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (MGSU)**, 26 Yaroslavskoe shosse, Moscow, 129337, Russian Federation; nbuvarova@yandex.ru;

Uvarova Natalia Borisovna — Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Construction and Theoretical Mechanics Department, **Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (MGSU)**, 26 Yaroslavskoe shosse, Moscow, 129337, Russian Federation; nbuvarova@yandex.ru.